

ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON F. A. G. GRIE, L. W. GILBERT, J. C. FOCKENSCHEIT, G. & E. HILDEBRAND, F. KLEIN.

VIERTE FOLGE.

Band 42. Heft 1.

VON GANZEN ZEICHEN VON H. HILDEBRAND & KLEIN.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. G. MÖNTGEN, W. VOIGT, H. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1913.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

BÖRSENSTRAßE 12.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhändlern, mit der
Zustimmung und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für das
10 Bände (= 4 Bände) entsprechende Jahrgang 1913.
(Anzahl der 2. Ausgabe 1913.)*

Inhalt.

	Seite
1. Ernst Dippel. Abhängigkeit der spezifischen Wärme und des Schmelzpunktes gewisser Legierungen von der thermischen Vorgeschichte und ihr Zusammenhang bei Heuslerschen Legierungen mit den magnetischen Eigenschaften	889
2. H. du Bois. Theorie der Polarmaturen	909
3. H. du Bois. Untersuchungen an Ringmagneten	953
4. Jun Ishiwara. Über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper	986
5. Alfred Kalähne. Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme	1001
6. Arthur Szarvassi. Elektrodynamische Theorie der Lichtbogen- und Funkenentladung	1031
7. Peter Erochin. Über die Zeemaneffekte der Wasserstofflinie H_α in schwachen Magnetfeldern	1054
8. M. Plancherel. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme	1061
9. W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue. Berichtigung zu der Arbeit: „Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen“	1064

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Plecherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Zu kaufen wird gesucht:

Annalen der Physik. a) komplette Serie.

b) Bd. 1—89 und 49—150 apart.

Offerten erbeten unter Chiffre L. T. 4283 an Rudolf Mosse, Leipzig.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 42.

1. Abhängigkeit der spezifischen Wärme und des Schmelzpunktes gewisser Legierungen von der thermischen Vorgeschichte und ihr Zusammenhang bei Heuslerschen Legierungen mit den magnetischen Eigenschaften; von Ernst Dippel.

(Auszug aus der Marburger Dissertation.)

Heusler entdeckte, daß bei gewissen schmiedbaren Cu-reichen Al-Mn-Bronzen von verhältnismäßig noch sehr hoher Magnetisierbarkeit durch entsprechende thermische Vorbehandlung kleinere oder größere Hysterese hervorgerufen werden kann.¹⁾ Diese qualitativen Beobachtungen Heuslers wurden später von Asteroth²⁾ durch eine Reihe quantitativer Versuche bestätigt. Es hatte sich ergeben, daß die oben genannten Schmiedebronzen nach dem Abschrecken von einer oberhalb des magnetischen Umwandlungspunktes gelegenen Temperatur und darauf folgender Alterung nur verschwindend kleine Hysterese, nach langsamem Abkühlen und Alterung jedoch große Hysterese zeigen. Durch diese Beobachtungen kam F. Richarz auf die Vermutung³⁾, daß diese Legierungen beim langsamen Abkühlen von einer oberhalb des magnetischen Umwandlungspunktes gelegenen Temperatur aus Molekularaggregate bilden, beim schnellen Abkühlen und Abschrecken jedoch nicht. Beim schnellen Abkühlen und Abschrecken wird es den Molekülen an Zeit fehlen, sich zu komplizierten Gebilden zusammenzuschließen, wie sie es tun, wenn die Dauer der Abkühlung groß ist. Diese Verhältnisse haben große Ähnlichkeit mit denjenigen bei allotropen Modifikationen⁴⁾, denn jeder allotropen Modifikation entspricht eine besondere Molekular-

1) F. Heusler, Marburger Sitzungsber. Nov. 1905. p. 98—99.

2) P. Asteroth, Dissertation Marburg 1907; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 21—32. 1908; Naturw. Rundschau 23. p. 249—250. 1908.

3) F. Richarz, Marburger Sitzungsber. 1904. p. 61; 1905. p. 100.

4) A. Wigand, Dissertation Marburg 1905. p. 7.

aggregation. Schließen sich durch den ganzen Körper hindurch die Molekeln so zusammen, daß jedesmal eine Anzahl Moleküle zu einem komplizierten Gebilde zusammentritt, so spricht man von Komplexbildung. So haben wir uns die molekularen Lagerungen beim langsamen Abkühlen vorzustellen. Durch das Zusammentreten mehrerer Molekeln zu einem Komplex wird eine größere Unfreiheit der Wärmebewegung bedingt, und nicht mehr alle Moleküle gelten als frei beweglich im Sinne der kinetischen Theorie: d. h. die spezifische Wärme wird kleiner.¹⁾

Wenn nun die obige Vermutung von F. Richarz bezüglich der Heuslerschen Legierungen zutrif, so war auch bei diesen zu erwarten, daß die mit komplexen Molekularaggregaten, d. h. die langsam abgekühlten, niedrigere spezifische Wärme zeigten als die schnell abgekühlten und abgeschreckten Legierungen.

Den Ausgangspunkt für die Versuche bildeten jedoch zunächst Bestimmungen von O. Richter²⁾ über Anomalien bei Pb-Bi-Legierungen, die auf eine ähnliche Erklärung durch Molekularkomplexe hinwiesen.

Zur Bestimmung der spezifischen Wärme wurde das Bunsensche Eiskalorimeter benutzt, das in der von O. Richter in seiner Dissertation angegebenen Weise verbessert worden war, und dessen Gänge sich in dem Intervall von 0 bis +8 mg pro Stunde hielten. Als Heizgefäß diente der Richtersche elektrische Ofen³⁾, der mitsamt seiner Auslösevorrichtung gut

1) F. Richarz, Sitzungsber. d. Phys. Ges. zu Berlin, 24. Febr. 1893; Wied. Ann. 48. p. 708. 1893; 67. p. 704 1899; Naturw. Rdschau 9. p. 221 u. 237. 1894; 15. p. 221. 1900; Limpricht-Festschrift, Greifswald 1900; Zeitschr. f. anorg. Chem. 58. p. 356. 1908. Kürzlich hat F. Richarz die Stellung seiner Überlegungen betreffend das Gesetz von Dulong und Petit zu denen von Einstein auseinandergesetzt Ann. d. Phys. 39. p. 1617—1624. 1912 und A. Wigand hat im Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik Bd. X Heft 1. p. 54—82. 1913 einen zusammenfassenden Bericht über neuere Untersuchungen über spezifische Wärme gegeben. Endlich hat Carl Benedicks gezeigt: „daß die Richarzsche Annahme der Atomkomplexe und deren Lockerung bei Erwärmung genau zu demselben Gesetz der Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur führt wie die Annahme von Einstein“; Comptes rendus 156. p. 1526. 1913.

2) O. Richter, Untersuchung der spezifischen Wärme von Legierungen und ihre Beziehung zur kinetischen Theorie der Elektronen und Atome. Dissertation Marburg 1908; desgl. Zeitschr. f. Instrumentenkunde. (Im Druck.)

3) O. Richter, l. c. p. 33.

funktionierte. Die künstliche Alterung, d. h. das Erhitzen bei einer konstanten Temperatur, die bedeutend höher liegt als diejenige des Zimmers, geschah so, daß die Legierung in siedendem Xylol am Rückflußkühler erhitzt wurde. Da Take gefunden hatte¹⁾, daß weit oberhalb des magnetischen Umwandlungspunktes im allgemeinen noch weitere Strukturumwandlungen auftreten, empfahl²⁾ er, die Abschreckung und die langsame Erkaltung von einer Temperatur aus vorzunehmen, die noch oberhalb dieser Strukturumwandlungen gelegen ist, denn auf diese Weise habe man die Versuchsprobe sicher in einem Zustande, welcher demjenigen in der Nähe des Schmelzpunktes ziemlich ähnlich sein wird. Das Abschrecken geschah daher von 600° C. aus und zwar in Quecksilber von Zimmertemperatur. Langsames Abkühlen wurde erreicht in einem eigens hierzu von E. Take gebauten elektrischen Ofen. Die Abkühlungszeit von 800° C. auf Zimmertemperatur betrug 15—20 Stunden.

Die Ergebnisse.

1. Die Bi-Pb-Legierungen.

Richter hat die spezifische Wärme der Blei-Wismut-Legierungen in den verschiedenen Zusammensetzungen untersucht und hat gefunden³⁾, daß die spezifische Wärme der unter

1) E. Take, Magnetische und dilatometrische Untersuchungen der Umwandlungen Heuslerscher ferromagnetisierbarer Manganlegierungen. Schriften d. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturw. zu Marburg (6) 13. p. 299 bis 404. 1906. Auch als besondere Schrift in N. G. Elwerts Verlag (Marburg) erschienen. Vgl. ferner die vorläufige Mitteilung in d. Ges. z. Beförderung d. ges. Naturw. zu Marburg vom 13. Aug. 1904, Sitzungsber. 1905, p. 35 bis 49, und in der Sitzung d. Deutsch. Phys. Ges. vom 3. März, Verhandl. 7. p. 133—145. 1905; sowie im Auszug in den Ann. d. Phys. 20. p. 849 bis 899. 1906, und in der Naturw. Rdschau 22. p. 209—211 und 221—223. 1907. Vgl. auch Journ. de phys. (4) 6. p. 460—472. 1907.

2) E. Take, Alterungs- und Umwandlungsstudien an Heuslerschen ferromagnetisierbaren Aluminium-Manganbronzen, insbesondere an Schmiedebronzen. Abhdlg. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. z. Göttingen, Math.-phys. Klasse. Neue Folge 8. Nr. 2. 1911 (Marburger Habilitationsschrift) p. 8 u. 9. Verlag der Weidmannschen Buchhandlung Berlin (auch einzeln erhältlich). — Vgl. ferner die vorläufige Mitteilung in den Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 1059—1084. 1910, und besonders den Auszug in der Naturw. Rdschau 26. p. 505—508 u. 521—524. 1911.

3) l. c. p. 83 u. 94.

Graphit gegossenen Legierungen ein Maximum in der Gegend 55 Proz. Pb und 45 Proz. Bi besitzt. Ferner zeigt die Kurve derselben ein Minimum in der Gegend 93 Proz. Pb, 7 Proz. Bi (vgl. Kurve I auf Fig. 1). Goß Richter dagegen seine Legierungen unter Kohlensäuregas, so blieb ein Maximum bei 50 Proz. Pb, 50 Proz. Bi bestehen; das Minimum hingegen verschwand und der auftretende Wert für die spezifische Wärme von 93 Proz. Pb, 7 Proz. Bi lag über dem nach der Mischungsregel berechneten (vgl. Kurve II in Fig. 1). Meine Versuche sollten

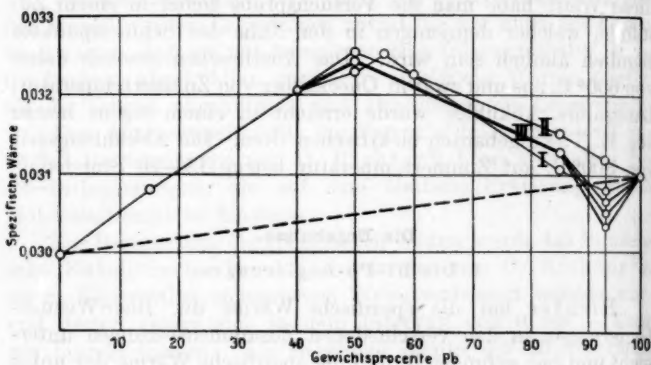


Fig. 1.

den Grund dieser Verschiedenheit aufdecken. Da Richter vermutete, daß diese Verschiedenheit eine Folge der Gießmethode sei, strebte ich danach, diese Methode zu variieren und den Einfluß dieser Variation auf die spezifische Wärme festzustellen. Infolgedessen goß ich Legierungen von der Zusammensetzung 93 Proz. Pb, 7 Proz. Bi und änderte dabei ihre Abkühlungszeit. Wie Tabelle 1 zeigt, sind fast alle Legierungen unter CO_2 gegossen. Ich verwandte zwei verschiedene Gießmethoden. Einmal erhitze ich beide Komponenten nur bis etwa 20° über den Schmelzpunkt und goß die Legierung sofort. Solche Legierungen kühlen sich natürlich, wenn sie in die Gießform von Zimmertemperatur kamen, sehr schnell ab. Bei der zweiten Gießmethode verlängerte ich diese Abkühlungszeit. Zu dem Zwecke erhitze ich die beiden Komponenten lange und hoch über ihren Schmelzpunkt, so daß die Legierung in bedeutend heißerem Zustande in die Form kam und diese be-

Tabelle I.

Nr. der Legierung	Art des Gusses	Gewichts- prozente		Gewicht g	Aus- gangs- temperat.	Spezif. Wärme
		Pb	Bi			
1	Unter Graphit	93	7	45,3692	106,2	0,03044
2	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt	93	7	55,3074	100,23	0,030677
2	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt	93	7	55,3024	46,28	0,030641
2	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt	93	7	55,3024	44,8	0,36681
2	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt. 25 Stunden in Xylol gealtert	93	7	55,3024	46,95	0,030495
3	Unter CO ₂ . Weit über den Schmelzpunkt er- hitzt	93	7	54,5414	101,05	0,030363
4	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt	93	7	53,7571	47,75	0,030641
4	Unter CO ₂ . Nur bis zum Flüssigwerden erhitzt. Dann in siedendem Toluol erhitzt und in Hg abgeschreckt . .	93	7	53,6107	49,25	0,030679
5	Unter CO ₂	85	15	50,9242	101,6	0,031338
6	Unter CO ₂	50	50	35,2530	100,52	0,032448

deutend erhitzte. Die Schieferform wurde vor dem Guß mit dem Bunsenbrenner etwas vorgeheizt, und so kühlte sich die Legierung viel langsamer ab.

Tabelle I zeigt nun deutlich, daß bei kurzem Gusse, d. h. wenn die Legierung nur wenig über ihren Schmelzpunkt erhitzt wird und sich schnell abkühlt, die spezifische Wärme höher ist als bei langsamem Gusse, wo die Abkühlung längere Zeit in Anspruch nimmt. Aus den Ergebnissen 2 gealtert und 3 geht hervor, daß sich die beiden Zustände, in denen sich die Legierungen befinden, entsprechen, daß es also dasselbe ist, ob ich eine Legierung beim Guß sich langsam abkühlen lasse oder eine kurz gegossene Legierung längere Zeit altere. Andererseits ist der Zustand, wie ihn eine kurz gegossene Legierung aufweist, kaum verschieden von demjenigen bei einer abgeschreckten Legierung. Dies geht aus den Versuchen an Legierung 4 hervor. Die beiden letzten Werte der Tabelle I sagen, daß mit zunehmen-

dem Wismutgehalt von der untersuchten Stelle an die spezifische Wärme stark zunimmt. Für 50 Proz. Pb, 50 Proz. Bi ergibt sich ein Wert, der sich mit dem von Richter gefundenen Werte deckt. Andererseits ist ein Wert für die spezifische Wärme des Pb von 0,031 durch die verschiedensten Beobachter festgestellt. Mithin behalte ich für alle Gießmethoden an der Stelle

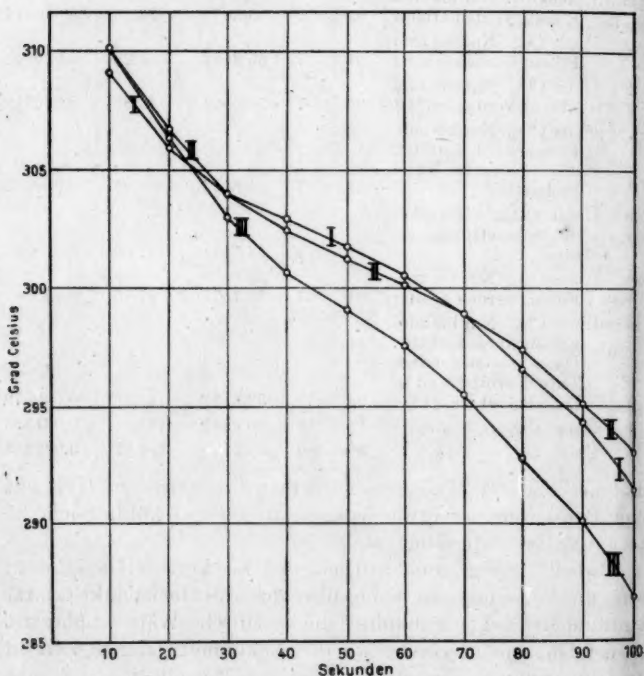


Fig. 2.

93 Proz. Pb, 7 Proz. Bi einen Minimalwert für die spezifische Wärme. Jedoch liegt dies Minimum bei verschiedenen Gießmethoden um so höher, je kürzer die Abkühlungszeit der gegossenen Legierung ist. Von den drei Teilkurven von III auf Fig. 1 gilt die unterste für Legierung 3, die langsam abgekühlt ist. Die mittlere gilt für Legierung 1, die bei mittlerer Abkühlungszeit unter Graphit gegossen ist; die oberste entspricht

einem Mittelwerte von Legierung 2 und 4 in ungealtertem Zustande. Man sieht, wie das Minimum bei verkürzter Abkühlungszeit nach dem durch die Mischungsregel bestimmten, in Fig. 1 durch die unterbrochene Linie dargestellten Werte hinrückt.

Um die Zusammensetzung meiner Legierungen zu prüfen, versuchte ich den Schmelzpunkt derselben zu bestimmen und wollte ihn mit den aus der Kappschen Arbeit¹⁾ bekannten Schmelzpunkten für Pb-Bi-Legierungen vergleichen, obwohl Richter seine auf dieselbe Weise gegossenen Legierungen hatte chemisch untersuchen lassen. Hierbei hatte sich eine gute Übereinstimmung mit dem geforderten Prozentgehalt ergeben.²⁾ Als ich mit Hilfe der Abkühlungskurven den Schmelzpunkt bestimmen wollte, fand ich die Temperatur desselben nicht konstant, sondern seine Höhe wechselte je nach der Vorbehandlung der Legierung. Durch eine Reihe Versuche stellte ich diesen Wechsel des Schmelzpunktes fest und machte dann einen systematischen Versuch an einer Legierung, dessen Ergebnis in Fig. 2 eingetragen ist. Die Legierung (93 Proz. Pb, 7 Proz. Bi) wurde zuerst nur wenig über den Schmelzpunkt erhitzt und dann gegossen, also genau so behandelt, wie Legierung 2 und 4. Der Schmelzpunkt ergab sich bei der darauf folgenden Bestimmung zu etwa 305° C. (vgl. Kurve I, Fig. 2). Die Werte der Ablesungen waren:

10"	309,1° C.	60"	300,5° C.
20	305,8	70	298,8
30	303,9	80	296,6
40	302,8	90	294,3
50	301,8	100	291,4.

Darauf wurde die Legierung mit der Bunsenflamme etwa 2—3 Minuten erhitzt und kühlte sich langsamer ab. Hierauf wurde sie wiederum auf ihren Schmelzpunkt untersucht, der sich zu 304° C. feststellen ließ (vgl. Kurve II).

10"	310,2° C.	60"	300,2° C.
20	306,7	70	299,0
30	304,0	80	297,3
40	302,5	90	295,2
50	301,3	100	293,0.

1) A. W. Kapp, Dissertation Königsberg i. Pr. 1901; H. Landolt u. R. Börnstein, Phys.-chem. Tabellen 3. Aufl. p. 307.

2) l. c. p. 92.

Hierauf wurde die Legierung etwa 3 Stunden in einem Bad von KNO_3 (Schmelzpunkt 340°) erhitzt, so daß die Legierung nur wenig unter ihrem Schmelzpunkte gehalten wurde. Die hierbei auftretenden Veränderungen sind dieselben wie bei sehr langem Altern in einer niedriger temperierten Flüssigkeit. Die darauf festgestellte Abkühlungskurve ist (vgl. Kurve III):

10"	310,2° C.	60"	297,6° C.
20	306,4	70	295,5
30	303,0	80	292,8
40	300,6	90	290,2
50	299,1	100	286,9.

Aus dieser Kurve folgt ein wesentlich tieferer Schmelzpunkt von etwa $301,5^\circ \text{C}$. Alle drei Untersuchungen geschahen an derselben Legierung und an demselben Tage. Sie zeigen sehr deutlich eine Abhängigkeit des Schmelzpunktes von der thermischen Vorbehandlung.

2. Die Heuslerschen Legierungen.

Wir wenden uns jetzt den Heuslerschen Legierungen zu, von denen mir zwei Schmiedeproben, A und B, zur Verfügung standen. Beide hatten dieselbe Zusammensetzung: 14,25 Proz. Mn, 10,15 Proz. Al und als Rest Cu mit geringen Verunreinigungen von Fe.¹⁾ Vielleicht sind die Prozentgehalte der beiden Legierungen nicht ganz ohne Verschiedenheit, besonders was die Verunreinigungen anbetrifft. Beide Legierungen waren nach dem Gusse gewalzt und dann durch Besprengen mit Wasser abgekühlt, d. h. also abgeschreckt worden. In diesem Zustande befand sich A; B dahingegen war nach dieser Behandlung nochmals auf 600°C . erhitzt und abgeschreckt worden. Ich begann meine Bestimmungen der spezifischen Wärme mit A. Im Versuchsschema schloß ich mich vollständig an die magnetischen Messungen Takes²⁾ an, welcher genau dieselbe Schmiedebronze obiger Zusammensetzung in zahlreichen Proben zu seinen Alterungs- und Umwandlungsmessungen verwandt hatte. Demnach verfuhr ich in folgender Reihenfolge:

1) Vgl. E. Take, l. c. Gött. Abhdlg. p. 15.

2) E. Take, l. c.

- a) Untersuchung der Legierung im Zustande der Lieferung.
25stündige Alterung der untersuchten Legierung in siedendem Xylol (bei 140° C.) und erneute Untersuchung.
Untersuchung nach 100stündiger Alterung.
- b) Erhitzen der Legierung auf 800° C. (bzw. 600° C. bei Leg. B) und Abschrecken derselben in Quecksilber von etwa 20° C. Untersuchung der spezifischen Wärme in diesem Zustande.
25stündiges Altern und erneute Untersuchung.
100stündiges Altern und abermalige Untersuchung.

Tabelle II.

	Legierung A.		Legierung B.	
	Ausgangstemp.	Spez. Wärme	Ausgangstemp.	Spez. Wärme
Ungealtert	48,6	0,10702		
25 Stunden in Xylol gealtert	46,42	0,10764		
100 Stunden in Xylol gealtert	46,8	0,10744		
Auf 800° (A) bzw. 600° (B) erhitzt und in Hg abgeschreckt	47,17	0,10735	46,7	0,10783
25 Stunden in Xylol gealtert	48,0	0,10744	46,58	0,10795
50 Stunden in Xylol gealtert	—	—	45,88	0,10729
100 Stunden in Xylol gealtert	48,15	0,10656		
Auf 800° erhitzt und dann langsam in etwa 15 Stunden abgekühlt	47,67	0,10571	46,53	0,10589
25 Stunden in Xylol gealtert	47,81	0,10562		
50 Stunden in Xylol gealtert	47,34	0,10533		
Auf etwa 800° erhitzt und in Hg abgeschreckt			46,27	0,10709

c) Erhitzen der Legierung auf 800° C. und langsames Abkühlen in etwa 15 Stunden. Untersuchung der spezifischen Wärme.
25stündiges Altern und Untersuchung.

50stündiges Altern und abermalige Untersuchung.

Die Ergebnisse der Untersuchung mit den so behandelten Legierungen sind in Tabelle II zusammengestellt; man kann dieselben kurz in folgendem zusammenfassen:

Die spezifische Wärme, die im Zustande der Lieferung einen bestimmten Wert hat, wird durch geringes Altern ein wenig größer, sinkt aber bei weiterm Altern wieder. Bei der im Zustande b) untersuchten Legierung treten dieselben Ergebnisse

auf. Die langsam abgekühlten Proben dagegen zeigen eine spezifische Wärme, die weit tiefer liegt als die der abgeschreckten und im Lieferungszustande untersuchten Proben, selbst nach 100stündiger Alterung bei 140°C .

Wie aus der Tabelle hervorgeht, ist der Einfluß der Komplexbildung auf die spezifische Wärme sehr groß. Er tritt in den kleinen Werten der spezifischen Wärme bei langsamer Abkühlung und bei langer Alterung deutlich zutage. Da F. Richarz dieses Verhalten vermutete, veranlaßte er mich zu diesen Versuchen, die seine Vermutungen durchaus bestätigten. Nebenbei ergab sich aus den Versuchen ein Parallelismus zu den magnetischen Messungen Takes an derselben Legierung. Für die Magnetisierungsintensität bei der Feldstärke als Parameter tritt bei kleinen Feldstärken nach kürzerer oder längerer Alterung stets ein Maximum auf¹⁾, nach dessen Überschreiten die Magnetisierung sich stabilen Endwerten asymptotisch nähert. Dies tritt am schönsten bei der Alterung abgeschreckter Proben in Erscheinung. Bei der Alterung langsam erkalteter Proben kann das Maximum der Magnetisierungswerte im Beginn der Alterung unter Umständen mehr oder weniger ganz verschwinden. Kalorimetrisch ist bei abgeschreckten Legierungen analog beim Altern ein anfängliches Ansteigen und nachheriges Abfallen der spezifischen Wärme gefunden worden. Bei der Alterung langsam abgekühlter Proben dagegen wurde kein Maximum der spezifischen Wärme beobachtet. Magnetisch ist ferner die Reversibilität der auftretenden Veränderungen nachgewiesen. Wie die letzte Zeile von Tabelle II zeigt, ist Legierung B nach der Untersuchung im Zustande c) nochmals von etwa 800°C . abgeschreckt worden. Die hierauf folgende Untersuchung der spezifischen Wärme ergab einen Wert, der mit der spezifischen Wärme im Zustande b) übereinstimmte. Damit ist die Reversibilität auch kalorimetrisch bewiesen.²⁾

Zusammenfassung und theoretische Besprechung der Ergebnisse.

Die Änderung der spezifischen Wärme, wie sie in der Einleitung zur Frage gestellt ist, zeigt sich sehr deutlich bei den

1) E. Take, l. c. Gött. Abhdlg. p. 49ff., 78 u. 79; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 1068f. 1910. Vgl. auch Phys. Zeitschr. 13. p. 903. 1912.

2) Vgl. E. Take, l. c. Gött. Abhdlg. p. 35.

Pb-Bi-Legierungen. Durch langsames Abkühlen nach dem Guß kommt eine niedrigere spezifische Wärme heraus als durch rasches Abkühlen. Dies zeigt Legierung 3 gegenüber 2 und 4 (ungealtert!). Die Art des Gusses ist also von Einfluß auf die Höhe der spezifischen Wärme, und zwar ändert sich diese in dem Sinne, wie es nach den Richarzschen Anschauungen zu erwarten ist. Ebenso ist von Einfluß die Behandlung von Legierungen nach dem Gusse. Dabei läßt sich nach den Richarzschen Anschauungen über Komplexbildung vermuten, daß Erhitzen auf eine Temperatur in der Nähe des Schmelzpunktes und nachfolgendes langsames Abkühlen auf gewöhnliche Temperatur gleichwirkend ist mit langsamem Abkühlen beim Guß, während Abschrecken von einer ebensolchen Temperatur einem sehr kurzen Guß entspricht. Bei einer Temperatur, die nahe dem Schmelzpunkte liegt, bestehen weniger Molekelkomplexe als bei Zimmertemperatur, da solche beim Flüssigwerden im allgemeinen überhaupt nicht mehr vorhanden sind. Beim langsamen Abkühlen von einer solchen — in der Nähe des Schmelzpunktes gelegenen — Temperatur erfolgt Komplexbildung, die eine Verminderung der spezifischen Wärme nach sich zieht. Beim Abschrecken von gleicher Temperatur dagegen fehlt die Zeit zur Komplexbildung, und die spezifische Wärme muß somit einen höheren Wert haben. Infolge seiner Bildung beim langsamen Abkühlen sehen wir einen Zustand, der durch solche Komplexbildung charakterisiert ist, als den stabileren an. Dann ist auch verständlich, wenn bei dem Altern, bei dem sich die Legierung auf einer die molekularen Umlagerungen begünstigenden Temperatur befindet, die Neigung zur Komplexbildung erhöht wird und damit im gewöhnlichen Falle durch das Altern die spezifische Wärme heruntergeht. Experimentell findet diese Auffassung ihre Bestätigung bei den Pb-Bi-Legierungen. Von den kurz gegossenen Legierungen 2 und 4 unterscheidet sich die abgeschreckte Legierung 4 in der spezifischen Wärme fast gar nicht; die spezifische Wärme der gealterten Legierung 2 ist dagegen wesentlich niedriger.

Ebenso bestätigen sich die Richarzschen Anschauungen bei den Heuslerschen Legierungen. Die erhitzten und langsam abgekühlten Legierungen zeigen eine geringere spezifische Wärme, als die erhitzten und abgeschreckten, da die ersteren eine weit größere Zahl von Molekularkomplexen enthalten. Durch das Altern geht auch hier die spezifische Wärme herunter,

jedoch erst nachdem sie einen Wert angenommen hat, der höher als der Anfangswert ist. Zur Erklärung dieser Tatsache kann man das Auftreten irgend welcher die spezifische Wärme erhöhender Elemente annehmen. Wenn wir mit Take¹⁾ den Magnetisierungselektronen einen Einfluß auf die spezifische Wärme zusprechen, so ergibt sich für diese Erhöhung der spezifischen Wärme bei Heuslerschen Legierungen eine einfache Erklärung in der durch die Alterung hervorgerufenen Bildung von Elementarmagneten. Im Anschluß an seine Erklärung des Atommagnetismus durch rotierende Helmholtzsche²⁾ Elementarquanta hat F. Richarz zwei Möglichkeiten angegeben, wie man sich die Bildung ferromagnetischer Elementarmagnete vorstellen kann. Nach der einen Auffassung gelangen durch konstitutive Strukturänderungen Elektronen innerhalb des Molekularverbandes zur Rotation, die vorher nicht rotierten; nach der anderen wird die Behinderung der Richtbarkeit der rotierenden Elementarquanten des Mn-Atoms durch Verbindungen des Mn-Atoms mit Al- und Cu-Atomen. Auf diese letzte Erklärungsmöglichkeit hat übrigens auch P. Weiss³⁾ aufmerksam gemacht. Schließlich hat Take noch auf eine andere Erklärungsmöglichkeit auf elektronentheoretischer Grundlage hingewiesen, die auf p. 99/100 seiner oben erwähnten Göttinger Abhandlung eingehend dargestellt ist. Mit der Bildung ferromagnetischer Elementarmagnete muß eine Erhöhung der spezifischen Wärme verbunden sein. Da aber andererseits die Komplexbildung zwischen den einzelnen Elementarmagneten nach der von F. Richarz aufgestellten kinetischen Theorie fester Körper zu einer Verminderung der spezifischen Wärme führt, so erklärt sich also, wie Take⁴⁾ gezeigt hat, die Einwirkung der Alterung auf die spezifische Wärme bei Heuslerschen Legierungen aus der Übereinanderlagerung der beiden Alterungseinflüsse. Im vorliegenden Falle scheint

1) E. Take, l. c. Gött. Abhdlg. p. 125; ferner Phys. Zeitschr. **13**. p. 904. 1912.

2) Sitzungsber. d. Niederrhein. Ges. zu Bonn 4. Dez. 1893; Sitzungsber. d. Münchener Akademie **24**. p. 3. 1894; Wied. Ann. **52**. p. 410. 1894. Zeitschr. f. anorg. Chemie **61**. p. 271. 1909; W. Gebhardt, Marburger Dissertation 1909. p. 35 u. 36.

3) Journ. de Phys. (4) **6**. p. 689. 1907.

4) E. Take, l. c. Gött. Abhdlg. p. 125 u. 126; ferner Phys. Zeitschr. **13**. p. 804. 1912.

bei kurzer Alterung der erste Einfluß, die Bildung ferromagnetischer Elementarmagnete, zu überwiegen, denn wir erhalten bei den abgeschreckten Proben nach 25stündigem Altern eine geringe Erhöhung der spezifischen Wärme; dies entspricht den analogen magnetischen Messungen Takes. Bei der langsam abgekühlten Probe fehlt allerdings eine solche Erhöhung, doch könnte ja eine Alterung von 25 Stunden hierfür schon zu lange sein. Dieser Punkt bedarf also noch der Aufklärung. Bei längerem Altern wird diese Erhöhung von den Wirkungen der Komplexbildung überdeckt, so daß nach einem Maximum der spezifischen Wärme ein Abfall derselben erfolgt.

Bei der Bestimmung des Schmelzpunktes mit Hilfe der Abkühlungskurve wird die Legierung über ihren Schmelzpunkt erhitzt und kühlt sich dann schnell ab. Bei dieser Erstarrungsart können nur einfache Molekularaggregate entstehen, und der Schmelzpunkt wird bestimmt für einen homogenen Schmelzfluß. Altern wir jedoch eine Legierung erst längere Zeit, so ist die Möglichkeit gegeben, komplizierte Molekularaggregate zu bilden, die beim Erkalten gewahrt bleiben. Erhitzt man nun eine solche Legierung *nur wenig* über ihren Schmelzpunkt, so läßt sich annehmen, daß nicht plötzlich alle Molekelkomplexe gesprengt werden, sondern daß von den in komplizierter Weise aneinander geknüpften Molekeln noch eine Anzahl in losem Zusammenhange bleibt, der vielleicht nur im Ungestörtbleiben der lokalen Aneinanderreihung besteht. Bei beginnender Abkühlung treten, wenn diese nicht allzu plötzlich erfolgt, diese Molekularkomplexe zum Teil wieder zu festen Aggregaten zusammen. Da jedoch nur ein Teil der Komplexstruktur erhalten geblieben ist, so haben wir jetzt eine Lösung der komplizierteren Moleküle in dem Schmelzflusse der einzelnen. Der Schmelzpunkt muß daher niedriger liegen, als ein Versuch mit ungealterter Legierung ergibt, deren molekulare Struktur diejenige unseres Lösungsmittels ist. Durch geringere thermische Vorbehandlung (Versuch II) wird die Anzahl der auftretenden Komplexmolekeln und damit die Schmelzpunktserniedrigung geringer. Erinnern will ich hierbei an den Schwefel.¹⁾ Geht derselbe aus dem flüssigen in den festen Zustand über, so kann er zwei verschiedene Erstarrungsprodukte liefern, bei sehr schneller Abkühlung entsteht amorpher, bei langsamem Ab-

1) A. F. Holleman, Lehrbuch d. anorg. Chemie. 7. Aufl. p. 96.

kühlen kristalliner Schwefel. Wird Schwefel über seinen Schmelzpunkt erhitzt, so bildet sich kristalliner neben amorphem Schwefel. Beim Abkühlen bei gewöhnlicher Temperatur — wo eine mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit herrscht — bleibt etwas amorpher Schwefel bestehen, während der größte Teil des Schmelzflusses kristalline Struktur annimmt. Wenn wir dies Erstarrungsprodukt auf seinen Schmelzpunkt untersuchen, so finden wir denselben niedriger als bei vorher nicht erhitztem Schwefel liegen. Zur Erklärung gilt folgendes: in letzterem Falle handelt es sich um ein gleichmäßiges kristallines Produkt, wohingegen wir es bei vorher erhitztem Schwefel mit einer Lösung von amorphem in kristallinem Schwefel zu tun haben. Nach dem Raoult'schen Gesetz wird der Schmelzpunkt des Lösungsmittels durch die Lösung eines Fremdkörpers in demselben — denn als solcher gilt amorpher Schwefel in unserem Fall — erniedrigt.

Die Erniedrigung des Schmelzpunktes bei gealterten Legierungen ist also direkt ein Beweis für die Bildungsmöglichkeit zweier in ihrer Molekelstruktur verschiedener Erstarrungsformen.

Mit der Bestätigung unserer theoretischen Auffassung ist eine sehr genaue Beachtung der verschiedensten Umstände bei der Bildung von Legierungen geboten. Werden doch nicht nur die magnetischen Eigenschaften und die Daten der spezifischen Wärme von der Entstehungsart betroffen, sondern auch die Höhe des Schmelzpunktes ändert sich mit derselben.

Marburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 17. Juli 1913.)

2. Theorie der Polarmaturen; von H. du Bois.¹⁾

(Aus dem Bosscha-Laboratorium.)

Hauptbezeichnungen (vgl. die Figuren):

A	Abstand Konvergenzpunkt.	\mathfrak{B}	Induktion.
B	Oberer Grenzhalmmesser.	\mathfrak{S}	Feldintensität.
F	geometr. Funktion.	\mathfrak{S}	Magnetisierung.
$P_n(q)$	Zonale Kugelfunktion.	a, b	Halbachsen.
R	Kugelradius.	m	Achsenverhältnis.
S	Flächenquerschnitt.	x, y, z	Flächenkoordinaten.
$2a$	Polabstand.	T	Magnetisches Potential.
b	Unterer Grenzhalmmesser.	α	Kegelhalmwinkel.
b_0	Bohrungshalmmesser.	β	Stirnhalmwinkel.
$2c$	Zylinderlänge.	γ, γ_0	Grenzwinkel.
$g = B/p$	Abkürzung.	δ	Brechungswinkel.
h	Zentrumsabstand (Fig. 6 A).	$\zeta = h/R$	Abkürzung.
p	Parabel-Parameter.	η, θ	Winkelkoordinaten.
$q = \cos \theta$	Abkürzung.	$\xi = x/R$	Abkürzung.
r	Radialkoordinate.	ϱ	Radiusvektor.
u	Kegelkoordinate.	φ, ψ	Hilfsfunktionen (§ 10).
x, y, z	Feldkoordinaten.	$\chi = x/p$	Abkürzung.

§ 1. Die Konstruktion kräftiger Elektromagnete ist bis auf weiteres zu einem Abschluß gelangt, wie in nachstehendem Aufsatz dargelegt wird. Zu ihrer vollen Ausnutzung erscheint jetzt eine allgemeine Theorie ferromagnetischer Polarmaturen unerlässlich. Elektrostatische Spezialfelder sowie elektromagnetische Felder eisenloser Solenoide und Spulen verschiedener Gestalt wurden eingehend untersucht²⁾, während auf diesem Gebiete nur die Stefansche Behandlung des freilich wichtigsten Falles abgestutzter Kegel vorliegt; in bezug auf Vollständigkeit reicht sie überdies heute kaum noch aus.

1) Vorl. Mitteilung H. du Bois, Verh. Kon. Akad. Amst. 21. p. 355, 1912; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 14. p. 758. 1912; 15 p. 292. 1913.

2) Vgl. z. B. C. Coleridge Farr, Proc. Roy. Soc. 64. p. 192, 1898.

Es sollen zunächst möglichst explizite geschlossene Gebrauchsformeln berechnet werden für das Feld verschieden geformter Armaturen, und zwar einmal axialsymmetrischer Rotationskörper; zweitens auch für die entsprechenden zweidimensionalen zylindrischen und prismatischen Gebilde, welche für allerlei Zwecke immer mehr Verwendung finden. Bei gegebenem Profile zeigen die Gleichungen für beide Gruppen meistens eine gewisse Analogie, so daß deren Zusammenstellung die Übersicht erleichtert; das gilt hier ebenso wie bei den gewissermaßen entgegengesetzten Eigenschaften mehrfacher Kugel- und Zylinderpanzer.¹⁾ Diese Berechnung bedeutet für die Erzeugung starker und dabei gleichförmiger Dauerfelder etwas Ähnliches wie diejenige zentrierter bzw. zylindrischer Linsensysteme für die Darstellung lichtstarker undeformierter Bilder. Auf Grund bekannter Analogien lassen sich die erhaltenen Gleichungen noch auf manchen anderen Gebieten verwerten; umgekehrt können hydrokinetische Vorgänge, sowie Aufgaben der Wärme- und Elektrizitätsleitung unter Umständen zu einer besseren Erkenntnis rein magnetischer Spezialprobleme führen (vgl. § 43).

Stefan setzte ohne nähere Begründung gleichförmig magnetisierte Armaturen voraus und gelangte so rein attraktions-theoretisch zu der bekannten Formel für das Feld im Zentrum zweier Kegelpole, die fast gleichzeitig von Sir A. Ewing und W. Low bei ihrer Isthmismethode angewandt wurde.²⁾ Jene einfachste Annahme soll in Abschnitt I und II beibehalten werden, indem sie zu einer oft genügenden ersten Annäherung führt. Im III. Abschnitt wird dann eine zweite Annäherung versucht unter der wahrscheinlichen Annahme des Auftretens magnetischer Quellen und Senken, welches ich als „Übersättigung“ bezeichnet habe.

§ 2. Für die Anziehung oder Abstoßung kleiner Körper kommt es hauptsächlich an auf die ersten Derivierten des Feldes nach den Koordinaten. So z. B. bei den Methoden des

1) H. du Bois, Wied. Ann. 63. p. 348. 1897; 65. p. 1. 1898.

2) J. Stefan, Wien. Ber. 97. p. 176. 1888; Phil. Mag. (5) 25. p. 322. 1888; Wied. Ann. 38. p. 440. 1889; J. A. Ewing u. W. Low, Proc. Roy. Soc. 45. p. 40. 1888; Phil. Trans. (A) 180. p. 227. 1889. Vgl. H. du Bois, Wied. Ann. 51. p. 545. 1894.

Längs- bzw. Quergradients und ebenso bei Attraktionsmagneten, wie sie in der operativen Augenheilkunde, der Payrschen „Eisen-einlaufmethode“ in der Darmchirurgie und bei Erzscheidern verwendet werden. Die Ergebnisse finden mithin sowohl im Laboratorium wie auch magnetotechnisch manche Anwendung.

Neben der Intensität des Feldes spielt bei neueren messenden Präzisionsmethoden¹⁾ seine Topographie, insbesondere seine größere oder geringere Uniformität, eine immer größere Rolle und soll daher ausführlicher diskutiert werden. Für ihre Beurteilung sind die zweiten Derivierten nach den Koordinaten maßgebend. Die x -Komponente des Feldes im Ursprung bei $\mathfrak{H}_x(0)$, in einem exzentrischen Punkte $\mathfrak{H}_x(x, y, z)$ dann ist nach dem Mac Laurinschen Satze

$$\mathfrak{H}_x(x, y, z) = \mathfrak{H}_x(0) + x \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right)_0 + z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \right)_0 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[x \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} \right)_0 + y \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} \right)_0 + z \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2} \right)_0 \right] + \dots$$

Legt man den Koordinatenursprung in ein Symmetriecentrum des Feldes, wie es bei einem Armaturenpaare meistens auftritt, so schwinden dort die drei ersten Derivierten; für Punkte auf der x -Achse ist außerdem $y = z = 0$, mithin

$$\mathfrak{H}_x(x) = \mathfrak{H}_x(0) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} \right)_0 + \dots$$

Die zweiten Ableitungen von \mathfrak{H}_x nach der Längs- und den Querrichtungen hängen vermöge der Laplaceschen Gleichung zusammen. Aus $\nabla^2 T = 0$ ergibt sich bei Rundarmaturen wegen der axialen Symmetrie für Achsenpunkte

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2}.$$

Dagegen ist bei zylindrischen Armaturen von genügender Länge überall $\partial^2 \mathfrak{H}_x / \partial z^2 = 0$, und demnach

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2}.$$

Ist die zweite Derivierte nach x positiv (negativ), so handelt es sich im Mittelpunkt O eines Armaturenpaares um ein Längs-minimum (Maximum), welches wegen der vorstehenden Be-

1) A. Bestelmeyer, Phys. Zeitschr. 12. p. 1107. 1911; W. J. Haas u. P. Drapier, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 14. p. 761. 1912; 15. p. 92. 1913; Ann. d. Phys. 42. p. 673. 1913.

ziehungen gleichbedeutend ist mit einem Quermaximum (Minimum), also einen Sattelwert darstellt.

§ 3. Für beliebige Punkte ist stets

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial z^2}.$$

Bei Zylinderarmaturen schwindet das letzte Glied immer, bei Rundarmaturen hat es in größerer Entfernung von der Achse nur einen geringen Wert.

Bei Quergradientmethoden handelt es sich um die ersten Derivierten

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x},$$

eine Gleichung, die Curie¹⁾ zur topographischen Feldbestimmung benutzte; das Produkt $\mathfrak{H}_x \partial \mathfrak{H}_x / \partial y$ spielt dabei die Hauptrolle. Betrachtet man Punkte auf der äquatorealen y -Achse, so hat dieses Produkt ein Maximum für

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathfrak{H}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right)^2 + \mathfrak{H}_x \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial y^2} = 0.$$

Kommt dagegen der Längsgradient in Betracht, so ist $\partial \mathfrak{H}_x / \partial x$ oder aber

$$\mathfrak{H}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathfrak{H}_x^2)}{\partial x}$$

zu diskutieren. Und zwar ist bekanntlich die erste Derivierte maßgebend für die Anziehungskraft auf ein längs der x -Achse frei bzw. zwangsläufig bewegliches gesättigtes Partikel, etwa ein ferromagnetischer Splitter (§ 22). Hingegen bestimmt die abgeleitete des Feldquadrats die Kraft, welcher ein dem Felde proportional magnetisierbares Partikel, etwa eine ungesättigte ferromagnetische Kugel oder ein beliebig gestalteter para- bzw. diamagnetischer Körper unterliegt.

I. Rundarmaturen.

§ 4. Das größte praktische Interesse bieten von Rotationsflächen begrenzte, drehrunde Armaturen. Die Meridiankurve $\mathfrak{x} = F(y)$ einer solchen (Fig. 1) sei zunächst eine ganz beliebige, ihre Koordinaten \mathfrak{x} , y vom Ursprung O abgemessen. Obiger vorläufiger Annahme gemäß sei die Magnetisierung \mathfrak{S} überall

1) P. Curie, Ann. de Chim. et Phys. (7) 5. p. 308. 1895.

parallel der x -Achse, so daß Polelemente ausschließlich auf den Endflächen auftreten. Zwischen y und $y + dy$ liegt dann ein schmaler Ring, entsprechend einer Elementarpolzone

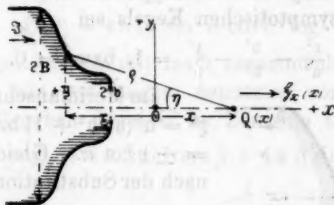


Fig. 1.

$2\pi \Im y dy$. In einem beliebigen Achsenpunkte $Q(x)$ im Abstände $\rho = \sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}$ von letzterer, ist

$$d\Im_x(x) = \frac{2\pi \Im y \cos \eta}{\rho^3} dy = \pi \Im \frac{x + \xi}{\rho^3} dy^2.$$

$$(II) \quad \Im(x) = \pi \Im \int \frac{x + \xi}{\sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}^3} dy^2$$

Die Differentiation des Integrals nach x gibt, weil $\partial \rho / \partial x = (x + \xi) / \rho$

$$(4) \quad \frac{\partial \Im(x)}{\partial x} = \pi \Im \int \frac{dy^2}{\sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}^3} - 3\pi \Im \int \frac{(x + \xi)^2 dy^2}{\sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}^5},$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \Im(x)}{\partial x^2} = -9\pi \Im \int \frac{(x + \xi) dy^2}{\sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}^5} + 15\pi \Im \int \frac{(x + \xi)^3 dy^2}{\sqrt{y^2 + (x + \xi)^2}^7}.$$

Für ξ ist $F(y)$ einzusetzen und zu integrieren zwischen den Grenzen $y = b$ und $y = B$, wobei x konstant bleibt. Für $x = 0$ wird die Rechnung meistens einfacher; die letzte Gleichung wird dann z. B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Im(0)}{\partial x^2} = & -9\pi \Im \int_b^B \frac{F(y) \sqrt{F^2(y) + y^2}}{(F^2(y) + y^2)^{5/2}} dy^2 \\ & + 15\pi \Im \int_b^B \frac{F^3(y) \sqrt{F^2(y) + y^2}}{(F^2(y) + y^2)^{7/2}} dy^2. \end{aligned}$$

Es kann zuweilen erwünscht sein diejenige Funktion F , d. h. diejenige Armaturform zu kennen, welche vorgegebenen Werten von \Im_x und dessen Derivierten entspricht. Indessen er-

§ 7. *Gleichförmigkeitsgrad.* Die Integrale der Gleichung (5) für $\partial^2 \mathfrak{S}(x)/\partial x^2$ lassen sich zwar für das Zentrum eines Rotationshyperboloids ($x=0$) berechnen; es genüge hier die Beschränkung auf Kegelstutzpole. Zweimalige Differentiation der Gleichung (8) nach x ergibt, da $\partial \beta/\partial x = \pm \sin^2 \beta/b$:

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial z^2} = 4\pi \mathfrak{S} \frac{3ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}^6} \\ = 4\pi \mathfrak{S} \frac{3 \operatorname{tg}^2 \beta}{a^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}^6} = 4\pi \mathfrak{S} \frac{3 \sin^2 \beta \cos^3 \beta}{a^2} = 4\pi \mathfrak{S} \frac{3 \sin^4 \beta \cos \beta}{b^2}$$

Das entsprechende Teilfeld \mathfrak{S}_1 besitzt nach der Längsrichtung (Querrichtung) in der Mitte stets ein Minimum (bzw. Maximum) wegen des für $0 < \beta < \pi/2$ durchweg positiven Werts von $\sin^2 \beta \cos^3 \beta$; dieser ist maximal für $\beta = \arctg \sqrt{\frac{2}{3}} = 39^\circ 14'$ und schwindet nur für $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$. In der Mitte ist also \mathfrak{S}_1 gleichförmig bei entfernten kleinen bzw. nahen großen Stirnflächen; die Ungleichförmigkeit ist bei vorgegebenem Polabstand am größten für $\beta = 39^\circ 14'$.

Gerade entgegengesetzt verhält sich das den beiden Kegelflächen entsprechende Teilfeld \mathfrak{S}_2 , dessen zweite Derivierte nach x für eben jenen Winkel schwindet, wie von Sir A. Ewing und W. Low auf Vorschlag des Hrn. Tanakadaté nachgewiesen und graphisch erläutert wurde. Im allgemeinen erhält man durch zweimalige Differentiation von $d\mathfrak{S}_2 = 4\pi \mathfrak{S} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\eta/\eta$ nach x , wobei $\partial \alpha/\partial x = \pm \sin^2 \alpha/\eta$, und nachfolgender Integration nach η

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_2}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_2}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_2}{\partial z^2} \\ = 4\pi \mathfrak{S} \frac{3 \operatorname{tg}^4 \alpha (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right) \\ = 4\pi \mathfrak{S} \cdot \frac{3}{2} \sin^4 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 3) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right). \end{cases}$$

($\alpha = \beta$), wofern $b = a \operatorname{tg} \alpha$ vorgegeben wird, aus der Differentiation der Gleichung (IV)

$$\alpha_m = \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\log \frac{B}{b}} \right)}.$$

Der Optimumwinkel ist wieder $\alpha_m = 54^\circ 44'$ für $b/B = 0$, wächst aber zugleich mit diesem Bruch; für einen bestimmten Stirnflächenradius b wird dann freilich der Polabstand $2a = 2b \cot \alpha$ um so geringer; in der Regel ist wohl letzterer das vorgegebene Hauptbestimmungstück.

Da $B > b$ ist dieser Ausdruck \pm für $\alpha \leq \arctg \sqrt{2/3} = 39^\circ 14'$; demnach besitzt \mathfrak{H}_2 ein Längsminium und Quermaximum für kleinere Kegelwinkel, während für die größeren das Gegenteil gilt, derart, daß der Feldwert dann in der Achse schwächer ist als in ihrer seitlichen Umgebung.¹⁾

§ 8. Schließlich ist für den Gleichförmigkeitsgrad des Gesamtfeldes, $\mathfrak{H}(0) = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$, die Summe der Ausdrücke (9) und (10) maßgebend:

$$(V) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial z^2} \\ &= 4\pi \mathfrak{H} \cdot \frac{3}{2b^3} \left[2\sin^4 \beta \cos \beta + \sin^4 \alpha \cos \alpha (5\cos^2 \alpha - 3) \left(1 - \frac{b^2}{B^2} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Die Aufgabe besteht nun darin, den Ausdruck in [] schwinden zu lassen; setzt man ihn gleich Null, so liefert das eine zweideutige Beziehung zwischen α und β , für die einige zusammengehörige Wertepaare im Hauptbereiche folgen. Dabei wurde b^2/B^2 vernachlässigt, wie es in den meisten praktischen Fällen zulässig ist. Dann muß also

$$3 \log \sin \beta + \log \sin 2\beta = \log \sin^4 \alpha \cos \alpha (3 - 5 \cos^2 \alpha).$$

Für vorgegebene α findet man hieraus leicht durch Ausprobieren unter zweckmäßiger Verwendung logarithmischer Differenzen die entsprechenden beiden Werte β_1 und β_2 .

Tabelle 1.

α	β_1	$\lg \beta_1$	β_2
$39^\circ 14'$	90°	∞	0°
$54^\circ 44'$	$79^\circ 26'$	5,361	$44^\circ 24'$
57°	$76^\circ 52'$	4,286	$48^\circ 2'$
60°	$72^\circ 49'$	3,234	$53^\circ 11'$
$63^\circ 26'$	$63^\circ 26'$	2,000	$63^\circ 26'$

Die Werte $\beta_2 < \alpha$ entsprechen einer versenkten Stirnfläche und kommen praktisch weniger in Betracht als diejenigen $\beta_1 > \alpha$, welche den Isthmusansatz darstellen; letzterer schwindet für $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 63^\circ 26' = \arctg \sqrt{4} = \arccos \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dies ist demnach

1) Vgl. J. A. Ewing u. W. Low, l. c. p. 230. B. Walter, Ann. d. Phys. 14. p. 112. 1904.

der „Gleichförmigkeitswinkel“ für ansatzlose Kegelstutzpole; dagegen wird für solche beim üblichen Optimumwinkel $54^{\circ}44'$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial x^2} = 4 \pi \mathfrak{H} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{27} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{4}{B^3} \right),$$

ein positiver Wert, der mit dem von Stefan l. c., p. 444, in ganz anderer Weise berechneten übereinstimmt und einem Längsminimum (Quermaximum) entspricht. Es ist nun aber auch für $\alpha = 54^{\circ}44'$ durchaus tunlich, Gleichförmigkeit und Intensität des Feldes zu vereinigen; dazu gehört eben nur ein Ansatz entsprechend $\beta_1 = 79^{\circ}26'$. Bei größeren Polabständen tritt nach alledem im allgemeinen stets ein Quermaximum auf, welches sich bei Annäherung genau paralleler Stirnflächen abflacht, um schließlich unter geeigneten Umständen in ein Querminimum überzugehen, falls die negative zweite Derivierte der Kegelflächen die positive der Stirnflächen zu übertreffen vermag. Nach dem Rande der Stirnflächen hin nimmt das Feld dann schließlich wieder ab. Diese Resultate werden von der Erfahrung durchaus bestätigt. (§ 26 des folgenden Aufsatzes.)

§ 9. *Beliebige Feldpunkte.* Betrachtet man zunächst in einer ebenen Stirnfläche (Fig. 4) bei S ein Flächenelement

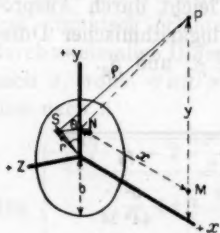


Fig. 4.

$r d\theta dr$ zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit Halbmessern r und $r + dr$ und zwei benachbarten Radien, welche die Winkel θ und $\theta + d\theta$ mit der y -Achse bilden; es bedingt keine Einschränkung, wenn diese in der Ebene durch die x -Achse und den Feldpunkt $P(x, y)$ gewählt wird. Für die Entfernung von letzterem bis zum Element S gilt

$$\rho^2 = \overline{PS}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{NS}^2 = x^2 + (y - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 - 2ry \cos \theta + r^2}$$

Man findet dann, durch Bildung des magnetischen Potentials T_1 und Differentiation desselben nach x , als x -Komponente des Feldes

$$\mathfrak{H}_{x1}(x, y) = - \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} = \mathfrak{H} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{x r dr}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2ry \cos \theta + r^2}}.$$

Integriert man nach r , so ergibt sich für eine einzelne Stirnfläche

$$(11) \quad \mathfrak{H}_{x1}(x, y) = \mathfrak{I} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{x(r y \cos \theta - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 \sin^2 \theta) \sqrt{x^2 + y^2 - 2 r y \cos \theta + r^2}} \right|_{r=0}^{r=b}.$$

Diese Gleichung führt auf elliptische Integrale. Für die radiale Komponente ergibt sich ähnlich

$$\mathfrak{H}_{y1}(x, y) = - \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial y} = \mathfrak{I} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{(y r - r^2 \cos \theta) dr}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 r y \cos \theta + r^2}^3}.$$

Dieser Ausdruck schwindet zugleich mit x sowie mit y . Betrachtet man zweitens eine Kegelfläche (Fig. 3, § 6), deren Spitze O als Ursprung gelte, dann erhält man einen ähnlichen Ausdruck für das Feld; nur ist hier statt x zu setzen $x + \xi$ und ist offenbar $\xi = r \cot \alpha$, so daß dann

$$\mathfrak{H}_{x2}(x, y) = \mathfrak{I} \int_0^{2\pi} d\theta \int_b^B \frac{(x r + r^2 \cot \alpha) dr}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2(x \cot \alpha - y \cos \theta) r - r^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha}^3}.$$

Und ähnlich wird die radiale Komponente

$$\mathfrak{H}_{y2}(x, y) = \mathfrak{I} \int_0^{2\pi} d\theta \int_b^B \frac{(y r - r^2 \cos \theta) dr}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2(x \cot \alpha - y \cos \theta) r - r^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha}^3}.$$

Man multipliziere zunächst Zähler und Nenner der Brüche mit $\sin^3 \alpha$; die beiden trinomisch-irrationalen Integrale nach r führen nun zu einem komplizierteren Ausdruck.

§ 10. Setzt man der Kürze halber

$\sqrt{(x^2 + y^2) \sin^2 \alpha + 2(x \sin \alpha \cos \alpha - y \sin^2 \alpha \cos \theta) r + r^2} = \sqrt{x, y, r}$ und $x \sin \alpha \cos \alpha - y \sin^2 \alpha \cos \theta + r = \varphi(x, y, r)$, so ergibt sich als Teilfeld für eine einzelne Kegelfläche

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_{x2}(x, y) &= \mathfrak{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \left| \log \{ \sqrt{x, y, r} + \varphi(x, y, r) \} - \right. \\ &\quad \frac{x^2 \sin^2 \alpha (x \operatorname{tg} \alpha + 2r) + y^3 (y \sin^2 \alpha \cos \theta + r(1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta)) + x y \operatorname{tg} \alpha (x \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta + y \sin^2 \alpha + r \cos \theta (4 \cos^2 \alpha - 1))}{\{x^2 \sin^2 \alpha + y^2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) + 2 x y \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta\} \sqrt{x, y, r}} \end{aligned} \right|_{r=b}^{r=B}.$$

Der Ausdruck für zwei „zentrierte“ Kegelflächen fällt etwas verschieden aus, je nachdem deren Spitzen zusammenfallen oder nicht. Setzt man $q(x, y, r) / \sqrt{x, y, r} = \psi(x, y, r)$, so kann man auch unter Fortfall einer unerheblichen Integrationskonstanten schreiben, sofern $\psi^2 < 1$

$$\left| \log \{ \sqrt{x, y, r} + q(x, y, r) \} \right|_b^B = \frac{1}{2} \left| \log \frac{1 + \psi(x, y, r)}{1 - \psi(x, y, r)} \right|_b^B$$

$$= \left| \psi + \frac{1}{3} \psi^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \psi^{2n+1} \right|_b^B.$$

Betreffs der Weiterentwicklung der Reihenglieder teilte Hr. W. Kapteyn in Utrecht mir freundlichst mit, daß nach Einsetzung der Grenzen und weiterer Umformung jedes Glied ψ^{2n+1} wiederum vier elliptischen Integralen entspricht, deren Reduktion im allgemeinen je alle drei Gattungen liefern kann. Dazu gesellen sich noch die elliptischen Integrale, welche dem nicht logarithmischen Gliede in (12) entsprechen. Unter diesen Umständen wird man die wirkliche Berechnung von $\mathfrak{S}_x(x, y)$ zu vermeiden suchen; indessen scheint mir die allgemeine Ungleichung (12) von Interesse, da sie einen Überblick gewährt und sich für Spezialwerte von x und y , namentlich wenn diese gegen b und B gering werden bzw. ganz schwinden, vereinfacht.

§ 11. Setzt man z. B. $x = 0$, so handelt es sich um Feldpunkte in der Äquatorealebene. Für ein undurchbohrtes Stirnflächenpaar im Abstände $2a$ wird in der mittleren Parallelebene aus Gleichung (11):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_1(y) &= 2\mathfrak{I} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{a(b y \cos \theta - a^2 - y^2)}{(a^2 + y^2 \sin^2 \theta) \sqrt{a^2 + y^2 - 2by \cos \theta + b^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(a^2 + y^2)}{(a^2 + y^2 \sin^2 \theta) \sqrt{a^2 + y^2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Für $y = 0$ ergibt sich hieraus Gleichung (22) weiter unten. Setzt man ferner abgekürzt $\sqrt{y^2 \sin^2 \alpha - 2y B \sin^2 \alpha \cos \theta + B^2} = \sqrt{y, B}$, so findet man für ein Kegelflächenpaar mit zusammenliegenden Spitzen

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_2(y) &= 2\mathfrak{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \left[\log \frac{\sqrt{y, B} + (B - y \sin^2 \alpha \cos \theta)}{\sqrt{y, b} + (b - y \sin^2 \alpha \cos \theta)} \right. \\ &\quad - \frac{B + (y - 2B \cos \theta) \sin^2 \alpha \cos \theta}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) \sqrt{y, B}} \\ &\quad \left. + \frac{b + (y - 2b \cos \theta) \sin^2 \alpha \cos \theta}{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta) \sqrt{y, b}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ist überdies $y = 0$, so heben die nicht logarithmischen Glieder sich auf und man findet dann in Übereinstimmung mit dem zweiten Gliede \mathfrak{S}_2 aus (IV)

$$\mathfrak{S}_2(0) = 2\mathfrak{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \log \frac{2B}{2b} = 4\pi \mathfrak{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha \log \frac{B}{b}.$$

§ 12. Setzt man andererseits nur $y = 0$, so handelt es sich um Feldpunkte auf der x -Achse. Im Abstände x von einer zentrisch durchbohrten Stirnfläche ergibt sich aus (11)

$$(15) \quad \mathfrak{S}_1(x) = 2\pi \mathfrak{I} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + b_0^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right).$$

Setzt man ferner abgekürzt $\sqrt{x^2 \sin^2 \alpha + 2xB \sin \alpha \cos \alpha + B^2} = \sqrt{x, B}$, so findet man für eine einzelne Kegelfläche im Abstände x von der Spitze aus (12) durch Integration nach θ

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_2(x) &= 2\pi \mathfrak{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{\sqrt{x, B} + x \sin \alpha \cos \alpha + B}{\sqrt{x, b} + x \sin \alpha \cos \alpha + b} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x \operatorname{tg} \alpha + 2B}{\sqrt{x, B}} + \frac{x \operatorname{tg} \alpha + 2b}{\sqrt{x, b}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung ist identisch mit einer für Achsenpunkte von Czermak und Hausmaninger¹⁾ hergeleiteten, wenn man darin $+x$ durch $-x$ ersetzt und sie etwas umformt. Für $x=0$ liefert sie offenbar wieder den bekannten Ausdruck für $\mathfrak{S}_2(0)$. Sie gestattet das Feld für jeden Achsenpunkt einer oder zweier Kegelflächen zu berechnen, sei es, daß ihre Spitzen zusammenfallen oder nicht. Beispielsweise beträgt es in der Mündung des Kegels (Punkt L beim linken Kegel in Fig. 3), wo $x = -b \cot \alpha$

1) P. Czermak und V. Hausmaninger, Wien. Ber. 98. 2. Abt., p. 1149. 1889. Es sei in diesem Zusammenhang auch hingewiesen auf die Kegelfunktionen F. G. Mehler, Math. Ann. 18. p. 161. 1881; C. Neumann, ebenda p. 195; G. Leonhardt, ebenda 19. p. 578. 1882.

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_2 &= 2\pi \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{\sqrt{b(b-2B)\cos^2 \alpha + B^2} - b \cos^2 \alpha + B}{b \sin \alpha (1 + \sin \alpha)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2B-b}{\sqrt{b(b-2B)\cos^2 \alpha + B^2}} + \frac{1}{\sin \alpha} \right]. \end{aligned} \right.$$

Zu bemerken ist, daß der gerade Kegel vom Halbwinkel $54^\circ 44'$ zwar eine magnetische Optimumfläche bezüglich seiner Spitze darstellt, jedoch keineswegs für exzentrische Achsenpunkte. Gleichung (15) läßt sich aus der in (16) gegebenen gewinnen, wenn man $\alpha = \pi/2$ nimmt und die Grenzen B und b ersetzt durch b bzw. b_0 . Die Summe beider Gleichungen gibt additiv das Gesamtfeld $\mathfrak{H}_1(x) + \mathfrak{H}_2(x)$ für Kegelpolstzpole.

§ 13. Durch Differentiation der Gleichung (15) erhält man für eine zentrisch durchbohrte Stirnfläche

$$(18) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_1(x)}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{J} \left[\frac{b_0^3}{\sqrt{x^2 + b_0^2}^3} - \frac{b^3}{\sqrt{x^2 + b^2}^3} \right],$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1(x)}{\partial x^2} = 2\pi \mathfrak{J} \left[\frac{3b^2 x}{\sqrt{x^2 + b^2}^5} - \frac{3b_0^2 x}{\sqrt{x^2 + b_0^2}^5} \right].$$

Dagegen aus Gleichung (16) für eine einzelne Kegelfläche

$$(20) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_2(x)}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[-\frac{r^2}{x} \cdot \frac{x \operatorname{tg} \alpha + r}{\sqrt{x, r}^3} \right]_b^B,$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2(x)}{\partial x^2} &= 2\pi \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &\quad \left[\frac{r^2}{x^2} \frac{3x^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + 7r x^2 \sin^2 \alpha + 5r^2 x \sin \alpha \cos \alpha + r^3}{\sqrt{x, r}^5} \right]_b^B \end{aligned} \right.$$

Aus letzteren erhält man wieder (18) bzw. (19), wenn man $\cos \alpha$ zwischen $||$ bringt, dann $\alpha = 0$ setzt und die Grenzen b_0 und b einführt. Für $x = 0$, d. h. an der Kegelspitze, geht der Faktor zwischen $||$ der beiden letzten Gleichungen in die unbestimmte Form $(1-1)/0$ über; entwickelt man die gebrochene Potenz des Nennertrinom, so erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_2(0)}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{J} \sin^3 \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2(0)}{\partial x^2} = 2\pi \mathfrak{J} \cdot \frac{3}{2} \sin^4 \alpha \cos \alpha (5 \cos^2 \alpha - 3) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2} \right);$$

letztere in Übereinstimmung mit Gleichung (10) § 7.

§ 14. *Flachpolschuhe und Bohrungen.* Das Teilfeld \mathfrak{H}_1 beträgt zwischen zwei parallelen undurchbohrten Flachpolen im

Mittelpunkt O , wie aus obiger Gleichung (13) folgt

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_1(0) &= 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a^3}{2b^3} - \dots \right) \\ &= 4\pi \mathfrak{Z}(1 - \cos \beta). \end{aligned} \right.$$

Dagegen für den Achsenpunkt H in einer Stirnfläche (Fig. 3)

$$(23) \quad \left\{ \mathfrak{H}_1(a) = 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \right) = 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \right). \right.$$

Der Mittelwert $\bar{\mathfrak{H}}_1$, d. h. die magnetische Potentialdifferenz r der beiden Stirnflächen, dividiert durch ihren Abstand $2a$, beträgt

$$(24) \quad \left\{ \bar{\mathfrak{H}}_1 = 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{2} \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \beta} \right). \right.$$

Es ist $\mathfrak{H}_1(a) > \bar{\mathfrak{H}}_1 > \mathfrak{H}_1(0)$; die Differenzen sind meist nicht erheblich; bei schwindendem Polabstand konvergieren alle drei Ausdrücke gegen $4\pi \mathfrak{Z}$. Für einen von O um x entfernten Achsenpunkt J ist nach Gleichung (15)

$$(25) \quad \left\{ \mathfrak{H}_1(x) = 4\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a+x}{2\sqrt{(a+x)^2 + b^2}} - \frac{a-x}{2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right). \right.$$

Bildet man $2(\mathfrak{H}_1(x) - \mathfrak{H}_1(0))$ und entwickelt für kleine x -Werte, so ergeben die Koeffizienten der quadratischen Glieder $\partial^2 \mathfrak{H}_1 / \partial x^2$ in Übereinstimmung mit Gleichung (1) und (9).

Bohrungen vom Radius b_0 brachte Stefan (l. c., p. 445) als fehlende Stirnflächenteile in Abrechnung. Es ergibt sich ohne weiteres aus Gleichung (22) als entsprechendes Manko des Feldes im Mittelpunkt O für jede einzelne Bohrung

$$(26) \quad \delta \mathfrak{H}_1(0) = -2\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b_0^2}} \right).$$

Dagegen im Punkte H

$$\delta \mathfrak{H}_1(a) = -2\pi \mathfrak{Z} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{4a^2 + b_0^2}} \right).$$

Der Einfluß einer oder zweier Bohrungen auf die Gleichförmigkeit läßt sich in ähnlicher Weise diskutieren, was z. T. bereits durch Stefan geschah. Die Ungleichförmigkeit des Feldes zwischen parallelen Flachpolen ist übrigens im mittleren Bereiche meistens nicht sehr störend. Bilden sie einen Winkel 2ε , so beträgt die seitliche Variation des Feldes bei kleinem Ab-

stande in erster Annäherung theoretisch $4\pi \mathfrak{J} \varepsilon / b$ pro Längeneinheit, in Wirklichkeit bedeutend mehr (vgl. § 26 des nachstehenden Aufsatzes). Durch konkaves Ausdrehen ließe sich übrigens in einem größeren Bereich eine Verbesserung erzielen, indem das Quermaximum sich dadurch abflacht.

§ 15. *Konkave und konvexe Kugelarmaturen* sind bequem in Zonenform herzustellen. Betrachtet man darin (Fig. 5) einen

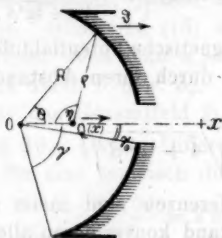


Fig. 5 A.

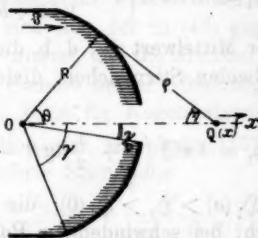


Fig. 5 B.

Elementarring vom Radius $R \sin \theta$, der Breite $R d\theta$, der radialen Magnetisierungskomponente $\mathfrak{J} \cos \theta$, d. h. der „Flächenbelegung“ $2\pi \mathfrak{J} R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$, so entspricht dem in einem vom Kugelzentrum O um x entfernten Achsenpunkt $Q(x)$ das resultierende Feld

$$d\mathfrak{H}(x) = \mp \frac{2\pi \mathfrak{J} R^2 \sin \theta \cos \theta \cos \eta}{\varrho^3} d\theta,$$

Das negative (positive) Vorzeichen entspricht Fig. 5 A (bzw. B). Es ist $\varrho^2 = x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta$ und $\varrho d\varrho/Rx = \sin \theta d\theta$, daher

$$\cos \theta = \frac{x^2 + (R^2 - \varrho^2)}{2xR}, \quad \cos \eta = \frac{x - R \cos \theta}{\varrho} = \frac{x^2 - (R^2 - \varrho^2)}{2x\varrho}.$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke wird

$$d\mathfrak{H}(x) = \mp \frac{\pi \mathfrak{J}}{2x^3} \cdot \frac{x^4 - (R^2 - \varrho^2)^2}{\varrho^3} d\varrho,$$

und dessen Integration ergibt nun

$$\mp \frac{\pi \mathfrak{J}}{2x^3} \left(\frac{R^4 - x^4}{\varrho} + 2R^2\varrho - \frac{\varrho^3}{3} \right) = \pm \frac{\pi \mathfrak{J}}{6} \cdot \frac{3x^4 + \varrho^4 - 6R^2\varrho^2 - 3R^4}{x^3\varrho},$$

oder zwischen passenden Grenzen, wenn ϱ eliminiert und $x/R = \xi$, sowie $\cos \theta = q$ gesetzt wird

$$(VI) \quad \mathfrak{H}(x) = \frac{2\pi \mathfrak{J}}{3} \left| \frac{\xi^4 - \xi^3 q - \xi^2(1-q^2) + 2\xi q - 2}{\pm \xi^3 \sqrt{\xi^2 - 2\xi q + 1}} \right|_{q=\cos \gamma_0}^{q=\cos \gamma}.$$

Falls Bohrungen nicht vorhanden sind, wird die untere Grenze $\gamma_0 = 0$. Das Vorzeichen $+$ oder $-$ richtet sich nach der Lage von Q an der konkaven (Fig. 5A) bzw. konvexen (Fig. 5B) Seite ($\xi \leq 1$); übrigen ist die Feldrichtung aus der Konfiguration stets ohne weiteres ersichtlich. Mittels dieser Gleichung für eine Einzelzone läßt sich das Feld für jeden Achsenpunkt eines „zentrierten“ Kugelzonenpaares berechnen, wobei dann das Interferrikum als bikonvexe, bikonkave oder konkav-konvexe Linse gestaltet sein mag.¹⁾

Für $\theta = 0$ oder π wird $\mathfrak{H}(x) = -2\pi\mathfrak{Z}(\xi^2 + 2)/3\xi^3$ bzw. $= \pm 2\pi\mathfrak{Z}(\xi^3 - 2)/3\xi^3$; dagegen für $\theta = \pi/2$

$$\mathfrak{H}(x) = \frac{2\pi\mathfrak{Z}}{3} \frac{\xi^4 - \xi^2 - 2}{\pm \xi^2 \sqrt{\xi^2 + 1}}.$$

Daraus ergeben sich ohne weiteres die Feldwerte für undurchbohrte Halbkugeln je nach der Lage des Achsenpunktes; beispielsweise ist $\mathfrak{H}(0) = +2\pi\mathfrak{Z}/3$ im Zentrum einer konkaven Halbkugel und aus Symmetriegründen auch überall in der Äquatorealebene. Für einen inneren Scheitelpunkt wird

$$\mathfrak{H}(R - \delta) = +2\pi\mathfrak{Z} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

für einen äußeren

$$\mathfrak{H}(R + \delta) = -2\pi\mathfrak{Z} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

wobei jedesmal δ gegen Null konvergiere; die Unstetigkeit beträgt $4\pi\mathfrak{Z}$, entsprechend einer bekannten Grenzbedingung.

§ 16. Gleichung (VI) läßt sich nach ξ entwickeln; statt $\mathfrak{H}(x)$ kann man auch das Potential $T(x)$ einführen; dessen Entwicklung nach zonalen Kugelfunktionen gibt für einen Achsenpunkt an der konvexen Außenseite

1) Umgekehrt gilt dies für ein axial starr magnetisiertes linsenförmiges Ferromagnetikum. Die zuweilen hervorgehobene Analogie des Verlaufs der Induktionslinien mit einem optischen Strahlengang ist nur eine oberflächliche, wenn auch im Sättigungsbereich die Permeabilität von gleicher Ordnung ist wie der Brechungsindex und das Brechungs-gesetz für kleinere Winkel merklich das gleiche wird. Jene Linien sind aber bekanntlich, im Gegensatz zu Lichtstrahlen, im allgemeinen keine Geraden und schneiden sich niemals gegenseitig.

$$T(x) = 2\pi \Im R \left[\frac{1}{\xi} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q dq + \frac{1}{\xi^3} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q P_1(q) dq + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi^n + 1} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q P_n(q) dq + \dots \right].$$

Oder allgemeiner für einen beliebigen Punkt (r, θ) im Abstände $r > R$ vom Kugelzentrum

$$T(r, \theta) = 2\pi \Im R \left[\frac{R}{r} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q dq + \frac{R^3 P_1(q)}{r^3} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q P_1(q) dq \dots \right. \\ \left. + \frac{R^n + 1}{r^n + 1} \int_{\cos \gamma_0}^{\cos \gamma} q P_n(q) dq + \dots \right];$$

mit der bekannten Umstellung für die konkave Innenseite, $r < R$. In den Koeffizienten lassen sich die bestimmten Integrale durch Differenzen von Kugelfunktionen der Argumente $\cos \gamma_0$ und $\cos \gamma$ darstellen. Hierdurch ist das Feld in seiner ganzen Ausdehnung bestimmt.

Einmalige Differentiation der Gleichung (VI) ergibt

$$(27) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}(x)}{\partial x} = 2\pi \Im \left[\frac{\xi^4(1-q^2) - \xi^3(3q-q^3) + 3\xi^2(1+q^2) - 6\xi q + 2}{\pm x \xi^3 \sqrt{\xi^2 - 2\xi q + 1^3}} \right]$$

Die zweite Derivierte ist

$$(28) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(x)}{\partial x^2} = 2\pi \Im \left[\frac{\begin{aligned} &-3\xi^5(1-q^2) + 2\xi^5(9q-5q^3) \\ &-5\xi^4(3+4q^2+q^4) + 20\xi^3(3q+q^3) \\ &-20\xi^2(1+3q^2) + 40\xi q - 8 \end{aligned}}{\pm x^2 \xi^3 \sqrt{\xi^2 - 2\xi q + 1^6}} \right]$$

Für $\theta = 0$ oder π ($q = \pm 1$) wird dies $-16\pi \Im / x^2 \xi^3$ bzw. $\mp 16\pi \Im / x^2 \xi^3$; für $\theta = \pi/2$, also $q = 0$, dagegen

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}(x)}{\partial x^2} = \mp 2\pi \Im \frac{3\xi^4 + 12\xi^3 + 8}{x^2 \xi^3 \sqrt{\xi^3 + 1^3}},$$

also für eine einzelne Halbkugel ohne Bohrung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}(x)}{\partial x^2} = \frac{2\pi \Im}{x^2 \xi^3} \mp \frac{(3\xi^4 + 12\xi^3 + 8) + 8\sqrt{\xi^3 + 1^3}}{\sqrt{\xi^3 + 1^3}}.$$

Das Vorzeichen $-$ oder $+$ bezieht sich wieder auf eine konkave bzw. konvexe Halbkugel, wie in Fig. 5A (B). Obiger Ausdruck schwindet nur für $\xi = 0$; gleichförmige Feldstellen

treten daher im Bereiche $+1 < \xi < +\infty$ nirgends auf. Dagegen schwindet die zweite Derivierte für jeden Punkt innerhalb zweier konzentrischer hemisphärischer Konkavarmaturen. Sämtliche Gleichungen werden dann sehr vereinfacht und liefern die Formeln, welche aus der Theorie einer starr magnetisierten Vollkugel bzw. des eine sphärische Höhlung¹⁾ umschließenden Ferromagnetikums bekannt sind; namentlich wird das Feld durchweg gleichförmig, und zwar $\mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J}/3$, unabhängig von ξ bzw. x .

§ 17. *Toroidzone.* Bei Rundarmaturen wird zuweilen ein Teil der Meridiankurve von unzentrierten Kreisbögen gebildet, deren Mittelpunkt C nicht auf der x -Symmetrieachse liegt, sondern im Abstände h (Fig. 6A). Betrachtet man wieder

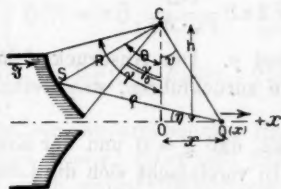


Fig. 6 A.

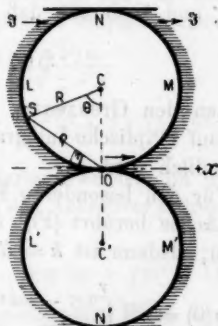


Fig. 6 B.

eine Elementarzone S vom Radius $h - R \cos \theta$, der Breite $R d\theta$, der radialen Magnetisierungskomponente $\mathfrak{J} \sin \theta$, d. h. der „Flächenbelegung“ $2\pi \mathfrak{J} R (h - R \cos \theta) \sin \theta d\theta$, so entspricht dem in einem vom Fußpunkt O um x entfernten Achsenpunkt $Q(x)$ das resultierende Feld

$$d\mathfrak{H}(x) = \frac{2\pi \mathfrak{J} R (h - R \cos \theta) \cos \eta \sin \theta}{r^2} d\theta.$$

1) Eine Beeinflussung der gleichförmigen Magnetisierung durch die Anwesenheit der Höhlung sei dabei ausgeschlossen, entsprechend der Stefanschen Grundannahme. Ganz anders würde das Feld inmitten eines „weichen“, ungesättigten Ferromagnetikums von hoher Permeabilität sich verhalten, wo es viel schwächer wäre. Vgl. H. du Bois, Wied. Ann. 65. p. 16. 1898; Electrician 40. p. 316, 513. 1898.

Es ist hier

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= x^2 + h^2 + R^2 - 2R \sqrt{(x^2 + h^2)} \cos(\theta + \eta) \\ &= x^2 + h^2 + R^2 - 2R (h \cos \theta - x \sin \theta)\end{aligned}$$

$$\cos \eta = \frac{x + R \sin \theta}{\varrho};$$

und folglich nach Eliminierung von ϱ , wenn $x/R = \xi$ und $h/R = \zeta$ gesetzt wird, zwischen den Grenzwinkeln γ_0 und γ

$$(29) \quad \oint(x) = 2\pi \Im \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{(\zeta - \cos \theta)(\xi + \sin \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 + \xi^2 + \zeta^2 + 2\xi \sin \theta - 2\zeta \cos \theta}}.$$

Dieses Integral ist offenbar das Ergebnis zweimaligen Differenzierens von

$$J = -\int \sqrt{(1 + \xi^2 + \zeta^2 + 2\xi \sin \theta - 2\zeta \cos \theta)} \cdot \sin \theta d\theta$$

nach ζ und ξ , derart, daß

$$\oint(x) = 2\pi \Im \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta \cdot \partial \xi}$$

zwischen den Grenzen γ_0 und γ . Der Ausdruck J läßt sich dann auf elliptische Integrale zurückführen, was freilich etwas umständlich wird.

Für den besonderen Fall, daß $\xi = 0$ und der Kreisbogen die x -Achse berührt (Fig. 6B) vereinfacht sich die Lösung ungemein; alsdann ist $h = R$ oder $\zeta = 1$ und es wird

$$\begin{aligned}\oint(0) &= \pi \Im \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{2(1 - \cos \theta) \sin^2 \theta}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}^3} d\theta = \pi \Im \int_{\gamma_0}^{\gamma} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \sin \theta d\theta, \\ &= -4\pi \Im \int_{\gamma_0}^{\gamma} -\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$(30) \quad \oint(0) = \frac{4\pi \Im}{3} \left(\cos^3 \frac{\gamma_0}{2} - \cos^3 \frac{\gamma}{2} \right).$$

Falls $\gamma_0 = 0$ und $\gamma = \pi/2$, wird daher für eine Hohlspitze $\overline{LOL'}$

$$\oint(0) = \frac{4\pi \Im}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{2} \right).$$

Falls $\gamma_0 = 0$ und $\gamma = \pi$ wird für ein Halbtoroid $\overline{NLOLN'}$ $\oint(0) = 4\pi \Im/3$; falls $\gamma = 2\pi$ ergibt sich für ein Hohltoroid $\overline{NLOLN'M'OMN'}$ im Punkte O : $\oint(0) = 8\pi \Im/3$, also das Doppelte des Feldes innerhalb einer Hohlkugel.

§ 18. *Rotationsellipsoid.* Das Feld ist bekanntlich gleichförmig innerhalb einer ellipsoidischen Aushöhlung inmitten eines überall parallel einer ihrer Achsen starr magnetisiert gedachten ausgedehnten Körpers. Die Mittelpunktsgleichung des Rotationsellipsoids sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Im Mittelpunkt $x = 0$ wird nach der Gleichung (II, § 4)

$$\mathfrak{H}(0) = \pi \mathfrak{J} \cdot a b^2 \int_{b^2}^{B^2} \frac{\sqrt{(y^2 - b^2) \{ (a^2 - b^2) y^2 - a^2 b^2 \}}}{\{ (a^2 - b^2) y^2 - a^2 b^2 \}^2} dy^2.$$

A. *Ovoid* ($m = a/b > 1$); wenn man im analogen Integral (§ 5) für ein Hyperboloid $+b^2$ durch $-b^2$ ersetzt, so erhält man das vorliegende, und aus Gleichung (III) in derselben Weise die Endformel für eine verlängert ellipsoidische Schale

$$(VIIA) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}(0) = \pi \mathfrak{J} \frac{a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} & - \frac{2 \sqrt{(a^2 - b^2) w}}{(a^2 - b^2) y^2 - a^2 b^2} \\ & + \log \{ b^4 - 2 a^2 b^2 + 2 (a^2 - b^2) y^2 + 2 \sqrt{(a^2 - b^2) w} \} \end{aligned} \right\}_{y=b}^{y=B}.$$

Für ein undurchbohrtes Halbovoid werden die Grenzen $b = 0$ und $B = b$; führt man jetzt das Achsenverhältnis m ein, so wird nach einiger Umformung

$$(31A) \quad \mathfrak{H}(0) = \frac{2\pi \mathfrak{J}}{m^2 - 1} \left(-1 + \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \log (m + \sqrt{m^2 - 1}) \right).$$

Für ein ganzes Ovoid gilt der doppelte Wert und zwar nunmehr durchweg für den Innenraum, indem die erste und zweite Derivierte dort überall schwindet.

B. *Sphäroid* ($m = a/b < 1$); die Integration führt auf eine andere Endformel für eine abgeplattet ellipsoidische Schale

$$(VIIB) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}(0) = \pi \mathfrak{J} \frac{a b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} & - \frac{2 \sqrt{(b^2 - a^2) w}}{(b^2 - a^2) y^2 + a^2 b^2} \\ & - \arcsin \frac{2 a^2 b^2 - b^4 + 2 (b^2 - a^2) y^2}{b^4} \end{aligned} \right\}_{y=b}^{y=B}.$$

Für ein undurchbohrtes Halbsphäroid wird hier

$$(31B) \quad \mathfrak{H}(0) = \frac{2\pi \mathfrak{J}}{1 - m^2} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \arccos m \right).$$

Für geringe Werte von m wird angenähert

$$\mathfrak{H}(0) = 2\pi \mathfrak{J} \left(1 - \frac{\pi}{2} m \right).$$

Für ein ganzes Sphäroid gilt wieder der doppelte Wert.¹⁾ Durch sphäroidisch konkave Armaturen könnte demnach das Feld in einem größeren Bereiche gleichförmig gestaltet werden als es bei Flachpolen erreichbar wäre, freilich nur für einen ganz bestimmten Polabstand $2a$; deswegen ist dieses Hilfsmittel praktisch wohl nur für besondere Fälle zu empfehlen.

§ 19. *Rotationsparaboloid.* In Fig. 7 sei F der Brennpunkt, DD die Direktrix; die Scheitelgleichung sei $2p\xi = \eta^2 + \zeta^2$. Im folgenden bezieht sich das obere Vorzeichen

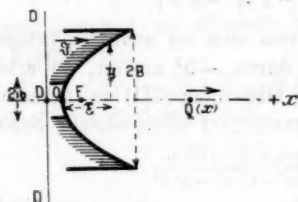


Fig. 7 A.

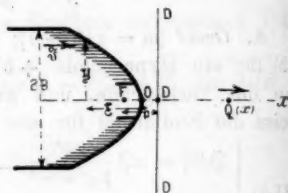


Fig. 7 B.

auf Fig. 7 A, das untere auf 7 B; setzt man in die allgemeine Gleichung (II, § 4) $\xi = \eta^2/2p$ ein, so wird

$$\mathfrak{H}(x) = 4\pi \mathfrak{I} p^2 \int_0^B \frac{(2p\xi \mp \eta^2) d\eta^2}{\sqrt{4p^2 x^2 + 4p(p \mp x)\eta^2 + \eta^4}}.$$

Die Integration ergibt ohne weiteres

$$\mathfrak{H}(x) = 2\pi \mathfrak{I} \left| \frac{p(\eta^2 \pm 2px)}{(p \mp 2x)\sqrt{4p^2 x^2 + 4p(p \mp x)\eta^2 + \eta^4}} \right|_{\eta=0}^{\eta=B}$$

Bezieht man die Lineargrößen auf den Parameter, indem man $x/p = \chi$ und $B/p = g$ setzt, so wird für eine undurchbohrte ($b = 0$) Paraboloidschale

$$(VIII) \quad \mathfrak{H}(x) = \frac{2\pi \mathfrak{I}}{2\chi \mp 1} \left[\frac{\pm 2\chi + g^2}{+ \sqrt{4\chi^2 + 4(1 \mp \chi)g^2 + g^4}} \mp 1 \right].$$

Differentiiert man nach x , so erhält man

$$(32) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}(x)}{\partial x} = \frac{4\pi \mathfrak{I}}{p(1 \mp 2\chi)^2} \left[\frac{\mp 8\chi^3 - 4\chi^2 g^2 \pm 4\chi g^2 \pm 6\chi g^4 - 4g^2 - 6g^4 - g^6}{+ \sqrt{4\chi^2 + 4(1 \mp \chi)g^2 + g^4}} \pm 1 \right].$$

1) Die Gleichungen (31 A) und (31 B) geben zugleich die entsprechenden Entmagnetisierungsfaktoren in Übereinstimmung mit den dafür geltenden praktischen Formeln, in denen das Achsenverhältnis an Stelle der Exzentrizität auftritt; vgl. H. du Bois, *Magn. Kreise*, p. 43, Berlin 1894.

Abermalige Differentiation ergibt

$$(33) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(x)}{\partial x^2} = \frac{16 \pi \mathfrak{Z}}{x^3 (1 \mp 2x)^3} \left[\frac{\pm 32 x^5 + 16 x^4 g^2 \mp 64 x^3 (g^2 + g^4) + 8 x^2 (9 g^2 + 12 g^4 + 5 g^6) \mp 2 x (6 g^2 + 24 g^4 + 30 g^6 + 5 g^8) + 18 g^4 + 30 g^6 + 10 g^8 + g^{10}}{+ \sqrt{4 x^2 + 4 (1 \mp x) g^2 + g^4}} \mp 1 \right].$$

Die Diskussion wird ziemlich kompliziert; insbesondere wird das Schwinden der Derivierten offenbar durch algebraische Gleichungen höheren Grades bestimmt, die gegebenenfalls graphisch zu lösen sind.

§ 20. Innerhalb des Paraboloids ist das Feld für alle Achsenpunkte vom Scheitel ab gerichtet (in Fig. 7A nach der $+x$ -Achse); für den Grenzfall eines vollständigen Paraboloids ($g = \infty$) würde indessen \mathfrak{H} und seine Derivierten längs der ganzen Achse schwinden und folglich nach allgemeinen Sätzen im ganzen Innern.¹⁾ Außerhalb muß \mathfrak{H} dann überall senkrecht zur Fläche gerichtet sein und den 4π -fachen Wert der normalen Magnetisierungskomponente aufweisen.

Für einen gegebenen Achsenpunkt ist das Feld offenbar am stärksten, wenn die paraboloidische Schale mit eben der gleichen Abszisse abschneidet; nach dem vorigen muß die Wirkung des restierenden, sich ins Unendliche erstreckenden Mantels gleich und entgegengesetzt sein. An der *konkaven* Seite einer Schale nimmt das axiale Feld vom Scheitel an etwas zu und durchläuft ein flaches Maximum; dort schwindet also die erste Derivierte, während die zweite in einem fernerem Punkt ebenfalls Null wird. So findet man z. B. folgende Werte für $\mathfrak{H}(x)$:

$\frac{x}{g} =$	0 (Scheitel)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ (Brennpkt.)	1	$\frac{3}{2}$	2	∞
1	1,10	1,11	1,08	1,00	0,68	0,41	0,26	$0 \times \pi \mathfrak{Z}$
2	0,59	0,61	0,62	0,64	0,68	0,70	0,67	$0 \times \pi \mathfrak{Z}$

Es sind damit Anhaltspunkte zur Erzeugung ziemlich ausgedehnter, merklich gleichförmiger Felder mittels konkaver paraboloidischer Schalen gegeben; die rechnerische Ausarbeitung muß in jedem Spezialfall erfolgen.

1) Analog einem potentialtheoretischen Satze, wonach eine homogene ellipsoidische Schale, von zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen begrenzt, im Innern nirgends eine Wirkung ausübt.

An der *konvexen* Seite (Fig. 7 B) verringert sich das axiale Feld vom Scheitel ab regelmäßig; für ein vollständiges Paraboloid ($g = \infty$) würde man z. B. als Grenzwerte finden:

$x = 0$ (Scheitel)	$\frac{1}{2}$ (Direktrix)	1	2	∞
$\Phi = 4$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$0 \times \pi \mathfrak{J}$

und für endliche Werte von g entsprechend weniger.

§ 21. Die bisherigen Resultate kann man dahin zusammenfassen, daß sich das Feld ebener, konischer, sphärischer und parabolischer Zonen für jeden Punkt der Symmetriachse durch geschlossene Ausdrücke darstellen läßt. Dasselbe gilt für das Feld einer oder zweier Rundarmaturen, sofern diese sich zonenweise aus solchen zentrierten Elementen zusammensetzen lassen, was in den meisten praktischen Fällen mit genügender Annäherung möglich sein dürfte.

Ähnlich wie bei der Kugelzone (§ 16) läßt sich das Feld bzw. das Potential für Achsenpunkte auch in eine Reihe entwickeln. Mit Hilfe des Legendreschen Satzes läßt es sich dann aber auch für beliebige Feldpunkte angeben und damit ist die Aufgabe theoretisch gelöst. In dieser Weise lassen sich weitere Rotationskörper ebenfalls behandeln, wenn auch mittels umständlicher Rechnungen.

Für das Potential eines um die x -Achse symmetrischen Feldes wird übrigens statt $\nabla^2 T = 0$ bekanntlich allgemein

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Hieraus und aus den Stetigkeitsbedingungen lassen sich allgemeine Eigenschaften eines solchen Feldes herleiten, womit sich insbesondere Stefan¹⁾ beschäftigte.

§ 22. *Attraktorische Einzelarmaturen.* Ähnliche Betrachtungen gelten für die Derivierten und es läßt sich danach die Anziehung längs der Achse beurteilen (§ 3). Zunächst ist für eine Einzelarmatur (Querschnitt S , magnetische Stärke $\mathfrak{J}S$), in größeren Abständen x , wo sie als punktförmig gelten kann:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mathfrak{J}S}{x^2}; & \Phi^2 &= \frac{(\mathfrak{J}S)^2}{x^4}. \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -2 \frac{\mathfrak{J}S}{x^3}; & \frac{\partial (\Phi^2)}{\partial x} &= -4 \frac{(\mathfrak{J}S)^2}{x^5}; & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 6 \frac{\mathfrak{J}S}{x^4}. \end{aligned}$$

1) J. Stefan, Wied. Ann. 17. p. 956. 1882.

Betrachtet man ferner die resultierende Wirkung einer elementaren Ringzone RR auf ihre Achsenpunkte (Fig. 8), so gilt folgende Tabelle II.

Tabelle 2.

I	$d\Phi_x = 2\pi \Im(\sin^2 \alpha \cos \alpha) \frac{d\eta}{\eta}$	ausgezogen	max. für $54^\circ 44'$
II	$\frac{\partial(d\Phi_x)}{\partial x} = 2\pi \Im \sin^2 \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) \frac{d\eta}{\eta^2}$	punktiert	$\left\{ \begin{array}{l} \text{pos. max. „ } 90^\circ \\ \text{Null „ } 54^\circ 44' \\ \text{neg. max. „ } 39^\circ 14' \end{array} \right.$
III	$\frac{\partial^2(d\Phi_x)}{\partial x^2} = 2\pi \Im \cdot 3 \sin^4 \alpha \cos \alpha$ $(5 \cos^2 \alpha - 3) \frac{d\eta}{\eta^3}$	strichpunkttiert	$\left\{ \begin{array}{l} \text{neg. max. „ } 70^\circ 7' \\ \text{Null „ } 39^\circ 14' \\ \text{pos. max. „ } 30^\circ 33' \end{array} \right.$
IV	$\frac{\partial(d\Phi_x)^2}{\partial x} = 8\pi^2 \Im^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha$ $(1 - 3 \cos^2 \alpha) \frac{d\eta}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{\eta^2}$	gestrichelt	$\left\{ \begin{array}{l} \text{pos. max. für } 74^\circ 1' \\ \text{Null „ } 54^\circ 44' \\ \text{neg. max. „ } 42^\circ 11' \end{array} \right.$
V	$\frac{\partial d(\Phi_x^2)}{\partial x} = 8\pi^2 \Im^2 \sin^5 \alpha \cos \alpha$ $(1 - 3 \cos^2 \alpha) \text{ funct}(\eta) d\eta$	—	—

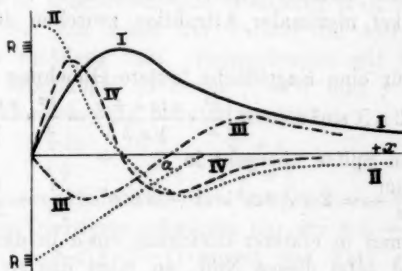


Fig. 8.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 8 qualitativ veranschaulicht.

Der Ausdruck $\sin^5 \alpha \cos \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha)$ durchläuft ein negatives bzw. positives Maximum für die Wurzeln der Gleichung

$$24 \cos^4 \alpha - 15 \cos^2 \alpha + 1 = 0,$$

nämlich

$$\cos \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{5 \pm \sqrt{\frac{43}{3}}}$$

oder

$$\alpha = 42^\circ 11' \quad \text{bzw.} \quad 74^\circ 1'.$$

Aus Tabelle 2 und Fig. 8 erhellt die bekannte Folgerung, daß das stärkste Feld dem Winkel $54^{\circ}44'$ entspricht, und daß bei zwei konzentrischen Kegelflächen die größte Gleichförmigkeit bei $\alpha = 39^{\circ}14'$ erreicht wird, wofern keine Stirnflächen auftreten. Denn der von dem einen Kegel herrührende positive Maximallängsgradient wird von dem entgegengesetzt gleichen des anderen Kegels genau aufgehoben; die beiden zweiten Derivierten schwinden auch des Inflexionspunktes wegen. Aus dem gleichen Grunde ergibt sich aber auch, daß letzterer Winkel der größten Anziehung eines Einzelkegels entspricht, wenn es sich um ein gesättigtes Partikel („Splittertypus“, § 3) am Orte seiner Spitze handelt; infolgedessen sind die wirksamen Elementarzonen auf einer Kegelfläche dieses Halbwinkels zwischen den Grenzen $\eta = b$ und $\eta = B$ anzuordnen. Bei ungesättigten Partikeln, deren Magnetisierung dem Felde proportional ist („Kugeltypus“), erhält man dagegen die größte Anziehung für Kegel von $42^{\circ}11'$, die maximale Abstoßung bei solchen von $74^{\circ}1'$ Halbwinkel. Es folgt daraus, daß man praktisch beiden Fällen gerecht wird, wenn man den Halbwinkel maximaler Attraktion zwischen 40° und 41° normiert.

§ 23. Für eine Kegelfläche lautete Gleichung (20)

$$\frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x} = 2\pi \Im \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[\frac{b^3}{x} \cdot \frac{x \operatorname{tg} \alpha + b}{\sqrt{x, b^3}} - \frac{B^3}{x} \cdot \frac{x \operatorname{tg} \alpha + B}{\sqrt{x, B^3}} \right],$$

was für deren Spitze übergeht in

$$\frac{\partial \Phi_2(0)}{\partial x} = 2\pi \Im \sin^3 \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{B} \right).$$

Bringt man in ersterer Gleichung $\cos \alpha$ in den Klammerausdruck und setzt diesen Null, so führt das zu einer komplizierten Bedingungsgleichung siebenten Grades in $x \sin \alpha$, deren Koeffizienten B , b und $\cos \alpha$ enthalten; ihre Diskussion wird recht verwickelt, und zwar ist dabei zu unterscheiden, ob $\alpha \geq \arctg \sqrt{2}$. Sie vereinfacht sich, wenn b sehr klein ist; der Fall $b = 0$ ist praktisch ausgeschlossen, da er einer nicht herstellbaren, absolut scharfen Kegelspitze entsprechen würde. Die erste Derivierte schwindet dann für $x = -\infty$, $-B \cot \alpha$, 0 und $+\infty$; d. h. Feldmaxima entgegengesetzten Zeichens liegen im Basispunkte K und der Spitze O des Kegels (Fig. 3). Bei zunehmendem Bohrungsdurchmesser $2b$ rückt das Maximum

von K nach links, dasjenige von O nach links (rechts), je nachdem $\alpha < (bzw. >) 54^\circ 44'$. Die zweite Derivierte wird im allgemeinen in irgend einem Achsenpunkte schwinden; für $\alpha = 39^\circ 14'$ findet das in der Kegelspitze statt.

Für eine ebene Stirnfläche war nach Gleichung (18):

$$\frac{\partial \mathfrak{H}(x)}{\partial x} = 2\pi \mathfrak{Z} \left[\frac{b_0^2}{\sqrt{x^2 + b_0^2}} - \frac{b^2}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right].$$

Setzt man hier den Klammerausdruck Null, so erhält man die Bedingungs Gleichung

$$(b^2 + b_0^2)x^6 + 3b^2b_0^2x^4 - b^4b_0^4 = 0;$$

oder wenn b und B nicht allzu verschieden sind und $(b + b_0)/2 = b_1$ gesetzt wird:

$$2\left(\frac{x^2}{b_1^2}\right)^3 + 3\left(\frac{x^2}{b_1^2}\right)^2 = 1.$$

Dem genügt offenbar der Wert $x^2/b_1^2 = 1/2$ oder $x = \pm b_1/\sqrt{2}$. Dies besagt, daß ein langes, magnetisiertes Rohr vom mittleren Halbmesser b_1 eine maximale Wirkung erzeugt im Abstände $b_1/\sqrt{2}$ von seiner ebenen Mündung.¹⁾

§ 24. Für Kugelzonen galt Gleichung (27), mittels deren sich $\partial \mathfrak{H}(x)/\partial x$ und somit der Verlauf der Attraktion längs der x -Achse verfolgen läßt. Beispielsweise gilt für eine undurchbohrte Halbkugel (Grenzen $\gamma_0 = 0$ und $\gamma = \pi/2$), wie solche attraktorisch wohl benutzt werden:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}(x)}{\partial x} = \frac{2\pi \mathfrak{Z}}{x\xi^3} \left[\pm \frac{\xi^2 + 2}{\sqrt{\xi^2 + 1}} - 2 \right].$$

Der konkaven (konvexen) Seite entspricht das Vorzeichen + bzw. -. Die Derivierte schwindet nur für $\xi = \pm\infty$. An der Konkavseite ($-\infty < \xi < +1$) nimmt das Feld vom Scheitel ab längs der Achse allmählich ab; die erste Derivierte entspricht durchweg einer Anziehung; sie hat ein Maximum $\pi \mathfrak{Z}/2R$ im Kugelzentrum O , indem dort $\partial^2 \mathfrak{H}(x)/\partial x^2$ schwindet (§ 16) und am Scheitel ist sie $= 2\pi \mathfrak{Z}(3/\sqrt{2} - 2)/R$. An der

1) Das wurde bereits 1847 von Kelvin (Repr. Pap. El. and Magn., 1. Ed., p. 503, London 1884) erkannt, während Stefan dann erst 1888 den Winkel $\arctg \sqrt{2}$ einführte. In diesem Zusammenhang verdienen Versuche Erwähnung, die W. R. King, Electr. World 11. p. 27. 1888, mit 15zölligen Geschützrohren anstellte. Nach der Abbildung bei S. P. Thompson, The Electromagnet, 2. Ed., p. 33, London 1892, liegt der „neutrale Punkt“ maximalen Feldes genau an der theoretischen Stelle.

Konvexseite ($+1 < \xi < +\infty$) zeigen sowohl das Feld wie die Anziehung Höchstwerte am Scheitel ohne weitere Singularitäten.

Für ein undurchbohrtes Rotationsparaboloid wurde Gleichung (32) hergeleitet. Aus dem dort (§ 20) diskutierten Verhalten des Feldes folgt dasjenige der ersten Derivierten bzw. der Attraktion; innerhalb eines vollständigen Paraboloids ($g = \infty$) schwindet sie demnach überall. An der konkaven Seite einer Schale wird ein gesättigtes Partikel beim Scheitel abgestoßen, dann entspricht dem Feldmaximum ein „neutraler Punkt“ und darauf erfolgt in weiter entfernten Achsenpunkten Anziehung, welche zunächst zunimmt, um sich dann wieder zu verringern. An der konvexen Seite herrscht stets Anziehung, welche vom Scheitel ab längs der Achse stetig abnimmt.

Die Attraktion der aus den behandelten Elementen zusammengesetzten Armaturen läßt sich ebenfalls berechnen; die Diskussion muß je dem Spezialfall vorbehalten bleiben.

II. Zylinder- und Prismenarmaturen.

§ 25. Sog. „Rippenpole“ gelangten neuerdings zur Verwendung bei der Steighöhenmethode, der Beobachtung transversaler magnetischer Doppelbrechung, dem Saitengalvanometer u. dgl. In manchen Fällen, wie z. B. bei dem neuen Schering-Schmidt'schen Langsaiten-Vibrationsgalvanometer¹⁾ sind sie so schmal und lang, daß sie als unendlich lange Prismen zu betrachten sind. Zylindrische und prismatische Armaturen spielen auch eine Rolle bei Erzscheidern mit „Walzenmagneten“ bzw. mit gerippten und gerillten „Polringen“, „Polschneiden“ und sog. „Sternlamellen“; ebenso bei der magnetischen Umlagerung von Darmabschnitten mit Eiseneinlauf.

Im folgenden stellen die bisherigen Figuren nunmehr zweidimensionale Normalprofile dar, wobei die der z -Achse parallelen erzeugenden Geraden senkrecht zur Bildebene gedacht sind und § wieder durchweg parallel der x -Achse angenommen wird. Der rechteckige Querschnitt kann sich in die Holme fortsetzen, wie es neuerdings wohl geschieht, oder allmählich in einen runden übergehen. Fig. 1 (§ 4) stellt in

1) H. Schering u. R. Schmidt, Archiv für Elektrotechn. 1. p. 254. 1912.

diesem Sinne ein ganz beliebiges Profil $\xi = F(\eta)$ dar, dessen Koordinaten vom Ursprung O abgemessen seien. Zwischen $\pm \eta$ und $\pm (\eta + d\eta)$ liegen zwei schmale Längsbänder, entsprechend Elementarpolstreifen $2 \Im d\eta$ pro Längeneinheit. In einem Achsenpunkt $Q(x)$ wird nun

$$d\Phi_x(x) = \frac{4 \Im \cos \eta}{\varrho} d\eta = 4 \Im \frac{x + \xi}{\varrho^2} d\eta,$$

$$(II^*) \quad \Phi(x) = 4 \Im \int \frac{x + \xi}{\eta^2 + (x + \xi)^2} d\eta.$$

Die Differentiation des Integrands nach x ergibt

$$(4^*) \quad \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = 4 \Im \int \frac{d\eta}{\eta^2 + (x + \xi)^2} - 8 \Im \int \frac{(x + \xi)^2 d\eta}{(\eta^2 + (x + \xi)^2)^2},$$

$$(5^*) \quad \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = -24 \Im \int \frac{(x + \xi) d\eta}{(\eta^2 + (x + \xi)^2)^2} + 32 \Im \int \frac{(x + \xi)^3 d\eta}{(\eta^2 + (x + \xi)^2)^3}.$$

Auch hier ist die Lösung inverser Probleme kaum zugänglich und hat man sich auf eine Anzahl direkter Aufgaben zu beschränken, die im Anschluß an die entsprechenden Rechnungen für Rundarmaturen kurz behandelt seien.

§ 26. *Zweischaliger hyperbolischer Zylinder.* Die Gleichung desselben und des asymptotischen Ebenenpaares sei

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad = 0.$$

Im Normalschnitt (Fig. 2, § 5) ist $\xi^2 = a^2(\eta^2/b^2 + 1)$ bzw. $\xi = \pm \eta a/b = \pm \eta \cot \alpha$; Gleichung (II^*) gibt nach Substitution dieses Wertes für den Punkt $O(x=0)$

$$\Phi(0) = 4 \Im a b \int_b^B \frac{\sqrt{\eta^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)\eta^2 + a^2 b^2} d\eta.$$

Die Integration nach η ergibt für beide Schalen

$$(III^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(0) = 8 \Im \frac{a b}{a^2 + b^2} \left| \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{a b^2}{a^2 b^2 + (a^2 + b^2)(\eta^2 - \eta \sqrt{\eta^2 + b^2})} \right. \\ \left. + \log(\eta + \sqrt{\eta^2 + b^2}) \right|_{\eta=b}^{\eta=B}, \end{aligned} \right.$$

unter Fortfall einer Integrationskonstanten $-\log b$. Für größere Werte der oberen Grenze B und $b=0$ erhält man, da $b/a = \tan \alpha$

$$(6^*) \quad \Phi(0) = 8 \Im \alpha \cdot \sin^2 \alpha + 8 \Im \sin \alpha \cos \alpha \log \frac{B + \sqrt{B^2 + b^2}}{b}.$$

Für das asymptotische Ebenenpaar wird

$$(7^*) \quad \mathfrak{H}(0) = 8 \mathfrak{Z} \sin \alpha \cos \alpha \log \frac{B}{b}.$$

§ 27. *Prismenarmaturen.* Betrachtet man Armaturen, begrenzt von in O sich schneidenden, geneigten Ebenen mit vorstehenden Rippen (Fig. 3, § 6); ihre Abmessung senkrecht zur Bildebene sei $2c$. Die Stirnfläche und die schrägen Mantelflächen seien in Elementarstreifen von der Breite $d\eta$ bzw. $d\eta/\sin \alpha$ und der Länge $2c$ zerlegt. Dann ergibt sich attraktionstheoretisch für die entsprechende Feldkomponente

$$d\mathfrak{H}_1(0) = \frac{2 \mathfrak{Z} a d\eta}{a^2 + \eta^2} \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + a^2 + \eta^2}},$$

$$d\mathfrak{H}_2(0) = \frac{2 \mathfrak{Z} \sin \alpha \cos \alpha d\eta}{\eta} \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + \frac{\eta^2}{\sin^2 \alpha}}}.$$

Für genügend große Werte von c werden die Wurzelfaktoren merklich der Einheit gleich. In diesem einfacheren Fall ergibt die Integration nach η von 0 bis b bzw. von b bis B bei zwei Paaren gleichkantiger schräger Flächen, welche sich in O schneiden, für das dort erzeugte Gesamtfeld

$$(IV^*) \quad \mathfrak{H}(0) = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = 8 \mathfrak{Z} \beta + 8 \mathfrak{Z} \sin \alpha \cos \alpha \log \frac{B}{b}.$$

Der Zusammenhang zwischen dieser Gleichung und Gleichung (6*) und (7*) tritt deutlich zutage. Die beiden Glieder sind wieder meistens von gleicher Ordnung; das erste

$$\mathfrak{H}_1 = 8 \mathfrak{Z} \int_0^b \frac{a d\eta}{a^2 + \eta^2} = 8 \mathfrak{Z} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = 8 \mathfrak{Z} \beta$$

bezieht sich auf die beiden parallelen Stirnrechtecke, bzw. auch allgemein auf parallele Flachpole; für $\beta = \pi/2$ wird offenbar auch hier $\mathfrak{H}_1 = 4\pi \mathfrak{Z}$.

§ 28. Ist dagegen $2c$ im Vergleich zu $2B$ und $2b$ nicht lang genug, um eine weitere Prismenverlängerung belanglos erscheinen zu lassen, so erhält man nach Integration und zyklometrischer Umformung

$$(8^*) \quad \mathfrak{H}_1 = 8 \mathfrak{Z} \int_0^b \frac{a c d\eta}{(a^2 + \eta^2) \sqrt{a^2 + \eta^2 + c^2}} = 8 \mathfrak{Z} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Das zweite Glied der Gleichung (IV*) entspricht dagegen den abgeschrägten Flächen. Es erreicht $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

ein Maximum für $\alpha = \arctg \sqrt{1} = 45^\circ$, in diesem Falle also der Optimumwinkel. Die beiden sich in einer Kante durch O schneidenden Ebenenpaare bilden hier wieder eine Optimumfläche. Für kürzere Prismen ergibt die Integration von $d\mathfrak{H}_3$ unter Berücksichtigung des Wurzelfaktors an Stelle der Gleichung (7*).

$$\mathfrak{H}_2 = 8\mathfrak{J} \sin \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{B}{b} - \log \frac{B^2 \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)}{b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{c^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)} \right].$$

Das subtraktive Korrektionsglied schwindet für genügend große Werte von c . Die Differentiation dieses Ausdrucks ergibt für $\partial \mathfrak{H}_2 / \partial \alpha$ einen sehr komplizierten Ausdruck in $\sin \alpha$, so daß der Optimumwinkel ($\alpha > 45^\circ$) dann gegebenenfalls bequemer graphisch zu ermitteln ist. Der logarithmische Faktor bedingt auch hier, wie bei Kegelaraturen, einen ganz überwiegenden Einfluß der den Stirnflächen nächstliegenden Flächenstreifen.

§ 29. *Gleichförmigkeitsgrad.* Dieser ist bei genügend langen Prismen vollkommen in der Richtung senkrecht zur Bildebene. Durch zweimalige Differentiation von $\mathfrak{H}_1 = 8\mathfrak{J}\beta$ nach x , wobei $\partial \beta / \partial x = \pm \sin^2 \beta / b$ zu setzen ist, findet man für $c = \infty$

$$\begin{aligned} (9^*) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} &= - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial y^2} = 8\mathfrak{J} \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= 8\mathfrak{J} \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)^2} = 8\mathfrak{J} \frac{\sin 2\beta \cos^2 \beta}{a^2} = 8\mathfrak{J} \frac{\sin^2 \beta \sin 2\beta}{b^2}. \end{aligned}$$

Das Teilfeld \mathfrak{H}_1 hat daher auch hier in O stets ein Längsminimum (Quermaximum) wegen der für $0 < \beta < \pi/2$ durchweg positiven Werte von $\sin 2\beta \cos^2 \beta$; dieser ist maximal für $\beta = \arctg \sqrt{1/3} = 30^\circ$ und schwindet für $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$. In der Mitte ist also \mathfrak{H} gleichförmig für entfernte kleine oder nahe große Stirnflächen; die Ungleichförmigkeit ist bei vorgegebenem Polabstand am größten für $\beta = 30^\circ$.

Gerade entgegengesetzt verhält sich das Teilfeld \mathfrak{H}_2 , indem dessen zweite Derivierte nach x für eben jenen Winkel schwindet. Man berechnet diese, indem man obigen Ausdruck für $d\mathfrak{H}_2$ zweimal nach x differentiiert, wobei $\partial \alpha / \partial x = \pm \sin^2 \alpha / b$ zu setzen ist; darauf integriert man nach y und findet für $c = \infty$

$$(10^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial x^2} &= - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial y^2} = 8\mathfrak{J} \frac{\operatorname{tg}^3 \alpha (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^3} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{B^3} \right) \\ &= 8\mathfrak{J} \sin^3 \alpha \cos 3\alpha \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{B^3} \right). \end{aligned} \right.$$

Da $B > b$ wird dieser Ausdruck offenbar \pm für $\leq 30^\circ = \arctg \sqrt{\frac{1}{3}}$; demnach zeigt \mathfrak{H}_2 ein Längsminimum (Quermaximum) für kleinere Flächenhalbwinkel, während für die größeren das Gegenteil zutrifft.

§ 30. Schließlich ist für den Gleichförmigkeitsgrad des Gesamtfeldes $\mathfrak{H}(0) = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ die Summe der Ausdrücke (9*) und (10*) maßgebend:

$$(V^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \mathfrak{H}(0)}{\partial y^2} \\ &= 8\mathfrak{J} \frac{1}{b^3} \left[\sin^2 \beta \sin 2\beta + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha \left(1 - \frac{b^2}{B^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Annullierung des Klammerausdrucks liefert wieder eine zweideutige Beziehung zwischen α und β . Unter Vernachlässigung von b^2/B^2 ergibt sich

$2 \log \sin \beta + \log \sin 2\beta = 3 \log \sin \alpha + \log (-\cos 3\alpha)$,
woraus folgende Werte berechnet sind:

Tabelle 3.

α	β_1	$\operatorname{tg} \beta_1$	β_2
30°	90°	∞	0°
45°	$82^\circ 38'$	7,735	$31^\circ 52'$
48°	$79^\circ 59'$	5,662	$36^\circ 11'$
$50^\circ 46'$	$77^\circ 9'$	4,384	$40^\circ 16'$
$54^\circ 44'$	$72^\circ 26'$	3,159	$46^\circ 21'$
60°	60°	1,732	60°

Die Werte $\beta_2 < \alpha$ entsprechen wieder einer versenkten Stirnfläche und spielen kaum eine Rolle. Die vortretenden Rippen entsprechen den Werten $\beta_1 > \alpha$ und schwinden für $\alpha = \beta_1 = \beta_2 = 60^\circ = \arctg \sqrt{3}$, wie auch leicht aus Gleichung (V*) zu folgern ist; dies ist daher der „Gleichförmigkeitswinkel“ für rippenlose gleichkantige Prismenpole. Dagegen zeigen solche beim Optimumwinkel 45° ein Quermaximum des Feldes, was indessen zu kompensieren ist durch Auflegen von Stirnrippen, entsprechend $\beta = 82^\circ 38'$. Falls c nicht genügend groß

ist, wird die Diskussion der zweiten Derivierten unverhältnismäßig kompliziert und kann daher füglich unterbleiben.

§ 31. *Beliebige Feldpunkte.* Betrachtet man zunächst eine ebene rechteckige Stirnfläche (Fig. 3) von den Abmessungen $2b \times 2c$, so ergibt eine einfache Rechnung für einen Punkt $P(x, y, 0)$ in der xy -Ebene

$$(11^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_{x1}(x, y) &= 2\mathfrak{J} \left(\operatorname{arctg} \frac{c}{x} \frac{b+y}{\sqrt{x^2 + c^2 + (b+y)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{c}{x} \frac{b-y}{\sqrt{x^2 + c^2 + (b-y)^2}} \right); \end{aligned} \right.$$

und für genügend große Werte von c

$$(11^*a) \quad \mathfrak{H}_{x1}(x, y) = 2\mathfrak{J} \operatorname{arctg} \frac{2bx}{x^2 + y^2 - b^2}.$$

Ebenso läßt sich $\mathfrak{H}_{y1}(x, y)$ berechnen. Auch für einen bezüglich eines prismatischen Ebenenpaares beliebig gelegenen Punkt läßt sich die Integration für $\mathfrak{H}_{x2}(x, y)$ und $\mathfrak{H}_{y2}(x, y)$ zwar durchführen, liefert aber eine recht verwickelte Gleichung. Überhaupt führt die Berechnung des Feldes langer prismatischer Armaturen von beliebiger, wenn auch unsymmetrischer Form, aber aus ebenen Facetten bestehend, zu integrierbaren Ausdrücken.

§ 32. Beschränkt man sich auf Punkte in der Äquatorealebene eines prismatischen Armaturenpaares (Fig. 3), so findet man für die Stirnflächen das Teilfeld $\mathfrak{H}_1(y)$, wenn man die letzten Gleichungen (11*) bzw. (11*a) verdoppelt und darin x durch a ersetzt. Für $y = 0$ ergibt sich wieder $8\mathfrak{J} \operatorname{arctg} b/a$; $y = b$ liefert $4\mathfrak{J} \operatorname{arctg} 2b/a$ und bei weiter zunehmendem y nimmt \mathfrak{H}_1 rasch ab.

Die Wirkung eines elementaren Polstreifens $d\eta$ auf einen Feldpunkt P (vgl. Fig. 3, wobei P jetzt in der y -Achse liegend anzunehmen ist) beträgt

$$d\mathfrak{H}_{x2}(y) = \mathfrak{J} \sin \alpha \cos \alpha \frac{2\eta d\eta}{y^2 \sin^2 \alpha - 2y\eta \sin^2 \alpha + \eta^2}.$$

Durch Integration nach η zwischen b und B und passende Kombination der vier Flächenstücke findet man für zwei Paar gleichkantige schräge Ebenen das Teilfeld

$$(14^*) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}_2(y) = & 2\mathfrak{S} \sin \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{y^4 \sin^4 \alpha + 2B^2 y^2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha + B^4}{y^4 \sin^4 \alpha + 2b^2 y^2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha + b^4} \right. \\ & + 2 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \operatorname{arctg} \frac{B \cot \alpha}{y - B} - \operatorname{arctg} \frac{B \cot \alpha}{y + B} \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{b \cot \alpha}{y - b} + \operatorname{arctg} \frac{b \cot \alpha}{y + b} \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hierdurch ist die Verteilung des Feldes in der Äquatorenalen Symmetrieebene, wo es überall nach der x -Achse gerichtet ist, völlig bestimmt. Für $\mathfrak{S}_1(y)$ gilt obige einfache Formel; für $\mathfrak{S}_2(y)$ ist die Rechnung gegebenenfalls leicht durchführbar. Ferner ergibt die Differentiation nach y der Gleichungen (11^a) und (14^{*}) $\partial(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2)/\partial y$; es läßt sich somit auch das Produkt $\mathfrak{S}_x \partial \mathfrak{S}_x / \partial y$ längs der Äquatorealachse verfolgen, insbesondere die Lage seines Maximums; dies läßt sich meistens bequemer graphisch durchführen.

Verläßt man schließlich die xy -Ebene, so findet man für das Gesamtfeld $\mathfrak{S}_x(o, o, z)$ in einem Punkte der z -Achse, welcher in der Entfernung z vor bzw. hinter dem Mittelpunkt O eines Armaturenpaars liegt, aus den beiden Gleichungen des § 28 mutatis mutandis:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_x(z) = & 4\mathfrak{S} \left(\operatorname{arctg} \frac{b(c+x)}{a\sqrt{a^2+b^2+(c+x)^2}} + \operatorname{arctg} \frac{b(c-x)}{a\sqrt{a^2+b^2+(c-x)^2}} \right) \\ & + 4\mathfrak{S} \sin \alpha \cos \alpha \log \frac{b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{(c+x)^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{(c-x)^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)}{B^2 \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{(c+x)^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{(c-x)^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Bei manchen Anwendungen benötigt man die Querintegrale

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{S}_x(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{S}_x^2(z) dz.$$

Letzteres bestimmt insbesondere die transversale magnetische Doppelbrechung.¹⁾ Da die Integration mühselig wird, ist auch hier die graphische Ermittlung meistens vorzuziehen.

§ 33. Handelt es sich schließlich um Feldpunkte auf der x -Achse, so ergibt sich aus (11^{*}), für $y = 0$, im Abstände x

1) Vgl. A. Cotton und H. Mouton, Ann. de Chim. und Phys. (8) 23. p. 162. 1911.

von einer einzelnen rechteckigen Stirnfläche das Teilfeld

$$(15^*) \quad \mathfrak{H}_1(x) = 4\mathfrak{J} \operatorname{arctg} \frac{bc}{x\sqrt{x^2 + b^2 + c^2}};$$

und für genügend große Werte von c

$$(15^*a) \quad \mathfrak{H}_1(x) = 4\mathfrak{J} \operatorname{arctg} \frac{b}{x} = 2\mathfrak{J} \operatorname{arctg} \frac{2bx}{x^2 - b^2}.$$

Für das Teilfeld \mathfrak{H}_2 findet man in einem solchen Punkte für ein einzelnes langes prismatisches Ebenenpaar ($c = \infty$) im Abstände x von der Schnittkante

$$d\mathfrak{H}_2(x) = 4\mathfrak{J} \sin \alpha \frac{\cos \alpha (y - x \sin \alpha \cos \alpha) - x \sin^3 \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2} dy.$$

Die Integration ergibt zwischen den Grenzen b und B

$$(16^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_2(x) &= 2\mathfrak{J} \sin \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{x^2 \sin^2 \alpha + Bx \sin 2\alpha + B^2}{x^2 \sin^2 \alpha + bx \sin 2\alpha + b^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{tg} \alpha \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{B} + \cot \alpha \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{b} + \cot \alpha \right) \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Für $x = 0$ ergibt sich aus dieser Gleichung offenbar wieder das halbe zweite Glied $\mathfrak{H}_2(0)$ von (IV*) und für $\alpha = \pi/2$ Gleichung (15*a). Mittels (15*a) und (16*) läßt sich das Gesamtfeld in jedem Punkte der x -Achse für ein oder zwei Ebenenpaare berechnen, sei es, daß letztere sich in einer gemeinsamen Kante schneiden oder nicht. Es beträgt z. B. in der „Mündung“ eines einzelnen Ebenenpaares (Punkt L in Fig. 3), wo $x = -b \cot \alpha$

$$(17^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_2 &= 2\mathfrak{J} \sin \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{b(b - 2B) \cos^2 \alpha + B^2}{b^2 \sin^2 \alpha} \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{arctg} \left\{ \left(1 - \frac{b}{B} \right) \cot \alpha \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Bildet man den Ausdruck $2(\mathfrak{H}_2(x) - \mathfrak{H}_2(0))$ aus (16*) und (IV*) und entwickelt diesen für kleine x -Werte, so liefern die Koeffizienten der quadratischen Glieder $\partial^2 \mathfrak{H}_2 / \partial x^2$ in Übereinstimmung mit Gleichung (1) und (10*).

Durch Differentiation der Gleichung (15*a) erhält man für eine einzelne rechteckige Stirnfläche:

$$(18^*) \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_1(x)}{\partial x} = -4\mathfrak{J} \frac{b}{x^2 + b^2},$$

$$(19^*) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_1(x)}{\partial x^2} = 8\mathfrak{J} \frac{bx}{(x^2 + b^2)^2}.$$

Dagegen aus Gleichung (16*) für ein einzelnes Ebenenpaar:

$$(20^*) \quad \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x} = 2 \Im \sin^2 \alpha \left| \frac{x \sin 2\alpha + 2y \cos 2\alpha}{x^2 \sin^2 \alpha + xy \sin 2\alpha + y^2} \right|^B,$$

$$(21^*) \quad \frac{\partial^2 \Phi_2(x)}{\partial x^2} = 4 \Im \sin^3 \alpha \left| \frac{-x^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha - 2xy \sin \alpha \cos 2\alpha - y^2 \cos 3\alpha}{(x^2 \sin^2 \alpha + xy \sin 2\alpha + y^2)^2} \right|^B.$$

Für $\alpha = \pi/2$ gehen letztere zwei Gleichungen zwischen den Grenzen 0 und b in die beiden vorhergehenden über, während (21*) für $x = 0$ mit Gleichung (10*) identisch wird.

§ 34. *Flachpolschuhe und Bohrungen.* Das Teilfeld Φ_1 beträgt im Mittelpunkt O zwischen zwei parallelen, ∞ langen rechteckigen Stirnflächen

$$(22^*) \quad \begin{cases} \Phi_1(0) = 4 \Im \operatorname{arctg} \frac{2ab}{a^2 - b^2} = 8 \Im \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \\ = 8 \Im \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{b} + \frac{a^3}{3b^3} - \dots \right) = 8 \Im \beta. \end{cases}$$

Bei Ausnutzung der vollen Länge des Feldes ist auch sein Wert an den Enden von Interesse; es beträgt für einen Achsenpunkt H an der Stirnfläche (Fig. 3)

$$(23) \quad \Phi_1(a) = 8 \Im \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{2a} \right).$$

Der Mittelwert $\bar{\Phi}_1$, d. h. die magnetische Potentialdifferenz der beiden Stirnflächen, dividiert durch ihren Abstand $2a$, beträgt

$$(24) \quad \bar{\Phi}_1 = 8 \Im \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} \log \frac{b}{\sqrt{4a^2 + b^2}} \right).$$

Es ist wieder $\Phi_1(a) > \bar{\Phi}_1 > \Phi_1(0)$; für $2a = 0$ konvergieren alle drei Ausdrücke gegen $4\pi \Im$. Der Wert des Teilfeldes Φ_1 in einem Achsenpunkt J , um x vom Mittelpunkt entfernt, beträgt

$$(25^*) \quad \Phi_1(x) = 4 \Im \operatorname{arctg} \frac{2ab}{a^2 - b^2 - x^2}.$$

Dagegen ist für einen seitlichen Achsenpunkt $N(o, y, o)$ nach Gleichung (11*a).

$$(25^*a) \quad \Phi_1(y) = 4 \Im \operatorname{arctg} \frac{2ab}{a^2 - b^2 + y^2}.$$

Es ist $\Phi_1(y) - \Phi_1(0) = -\Phi_1(x) + \Phi_1(0)$ für geringe Werte von x und y . Bilden zwei der z -Achse parallele rechteckige Flachpole einen Winkel, so läßt sich das Feld nach § 31 theoretisch ebenfalls berechnen.

§ 35. Bohrungen und Schlitzte vom rechteckigen Profil ($b_0 \times c_0$) lassen sich als fehlende Stirnflächenteile in Abrechnung bringen. Aus Gleichung (8*) ergibt sich für jede einzelne Bohrung als Manko des Feldes in O ohne weiteres

$$(26^*) \quad \delta \mathfrak{H}_1(0) = -4 \mathfrak{J} \operatorname{arctg} \frac{b_0}{a} \sqrt{\frac{c_0^2}{a^2 + b_0^2 + c_0^2}}.$$

Beispielsweise ergibt dies für $2a = 2 \text{ mm}$, $2b_0 = 1 \text{ mm}$, $2c_0 = 4 \text{ mm}$, das Lumen des Schlitzes $4b_0c_0 = 4 \text{ qmm}$, $\sqrt{a^2 + b_0^2 + c_0^2} = 2,29 \text{ mm}$, und bei doppelseitiger Aufschlitzung jeder Polspitze $2\delta \mathfrak{H}_1(0) = -3,28 \mathfrak{J}$.

Dagegen wird bei zwei runden Bohrungen vom Radius $b_0 = 1,13 \text{ mm}$, das Lumen ebenfalls 4 qmm ; bei gleichem Polabstand $2a = 2 \text{ mm}$ liefert Gleichung (26*) den Wert $2\delta \mathfrak{H}_1(0) = -4,24 \mathfrak{J}$, ein erheblich größeres Manko; hätte die Bohrung den Durchmesser 4 mm gleich der vorher angenommenen Schlitzlänge, so wäre der Ausfall noch viel größer.

Der schädigende Einfluß von Schlitzten auf die Intensität — und übrigens auch auf die Gleichförmigkeit — des Feldes innerhalb ihrer Gesichtsweite ist bedeutend geringer als bei runden Bohrungen¹⁾; da erstere sich überdies dem Strahlengang meistens besser anpassen, verdienen sie im allgemeinen den Vorzug.

§ 36. *Kreiszyllindrische Armaturen* lassen sich theoretisch zur Verbesserung des Gleichförmigkeitsgrades verwenden. Betrachtet man (Fig. 5 A, B) ein symmetrisches Paar Elementarstreifen von der Breite $R d\theta$, der radialen Magnetisierungskomponente $\mathfrak{J} \cos \theta$, d. h. der gesamten „Flächenbelegung“ pro Längeneinheit $2 \mathfrak{J} R \cos \theta d\theta$, so entspricht dem in einem vom Zentrum O um x entfernten Achsenpunkte $Q(x)$ für $c = \infty$ der resultierende Feldanteil:

$$d \mathfrak{H}(x) = \mp \frac{4 \mathfrak{J} R \cos \theta \cos \eta}{q} d\theta.$$

Das negative (positive) Vorzeichen entspricht Fig. 5 A (bzw. B). Es ist hier wieder

$$\varrho^2 = x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta \quad \text{und} \quad \cos \eta = \frac{x - R \cos \theta}{q}.$$

1) Vgl. O. M. Corbino, Phys. Zeitschr. 11. p. 521. 1910.

Nach Substituierung dieser Ausdrücke wird

$$\mathfrak{H}(x) = \mp 4\mathfrak{Z} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{(Rx - R^2 \cos \theta) \cos \theta}{x^2 - 2xR \cos \theta + R^2} d\theta.$$

Die Integration ergibt, wenn wieder $x/R = \xi$ und $\cos \theta = q$ gesetzt wird, die von Gleichung (VI) wesentlich abweichende Formel

$$(VI^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}(x) = \frac{\mathfrak{Z}}{\mp \xi^2} & \left| 1 - \xi^2 \right| \theta + 2\xi(1 - q^2) \\ & + (1 + \xi^2) \arcsin \frac{\xi^2 q - 2\xi + q}{\xi^2 - 2\xi q + 1} \Big|_{q=\cos \gamma_0}^{q=\cos \gamma} \end{aligned} \right.$$

Die Vieldeutigkeit der Arcussinusfunktion erheischt hier einige Vorsicht. Für das Zentrum $O(x=0)$ einer konkaven zylindrischen Armatur von der endlichen Länge $2c$ wird das Feld

$$\mathfrak{H}(0) = \frac{+4\mathfrak{Z}c}{\sqrt{c^2 + R^2}} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos^2 \theta d\theta = \frac{+\mathfrak{Z}c}{\sqrt{c^2 + R^2}} \left| 2\theta + \sin 2\theta \right|_{\gamma_0}^{\gamma}.$$

Beispielsweise gibt ein unendlicher Halbzylinder ($\gamma = \pi/2$, $\gamma_0 = 0$) $\mathfrak{H}(0) = \pi \mathfrak{Z}$ im Zentrum und aus Symmetriegründen auch überall in der Äquatorealebene. Für einen inneren Scheitelpunkt wird $\mathfrak{H}(R-\delta) = +\mathfrak{Z}(2\pi - 2)$, für einen äußeren $\mathfrak{H}(R+\delta) = -\mathfrak{Z}(2\pi + 2)$, die Unstetigkeit ist wieder $4\pi \mathfrak{Z}$. Die Derivierten $\partial \mathfrak{H}(x)/\partial x$ und $\partial^2 \mathfrak{H}(x)/\partial x^2$ lassen sich aus Gleichung (VI*) leicht gewinnen. Für zwei konzentrische Halbzylinder, also für einen Hohlzylinder, wird im ganzen Innenraum $\mathfrak{H} = 2\pi \mathfrak{Z}$, in Übereinstimmung mit dem transversalen Entmagnetisierungsfaktor für einen vollen Kreiszylinder.¹⁾

§ 37. *Elliptische Zylinder.* Ähnliches trifft auch allgemein und streng zu für einen elliptischen Schacht inmitten eines überall parallel einer Querachse starr magnetisiert gedachten ausgedehnten Körpers. Die Mittelpunktsgleichung des elliptischen Zylinders sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1) Der einer Toroidzone (§ 17) analoge Fall eines nicht axial zentrierten Kreiszylinders kann füglich übergangen werden.

Im Mittelpunkt ($x = 0$) wird nach Gleichung (II*)

$$\mathfrak{H}(0) = 4\mathfrak{Z} a b \int_b^B \frac{\sqrt{b^2 - \eta^2}}{(b^2 - a^2)\eta^2 + a^2 b^2} d\eta.$$

Die Integration nach η ergibt für eine zylindrische Schale

$$(VII^*) \mathfrak{H}(0) = 4\mathfrak{Z} \frac{a b}{a^2 - b^2} \left[\arcsin \frac{\eta}{b} + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} a \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{b^2}} \right]_b^B.$$

Für einen Halbzylinder wird zwischen den Grenzen 0 und b

$$(31^*) \quad \mathfrak{H}(0) = 2\pi \mathfrak{Z} \frac{b}{a + b} = 2\pi \mathfrak{Z} \frac{1}{m + 1},$$

und zwar für jeden Wert von $m = a/b$; für den Innenraum elliptischer Hohlzylinder gelten die doppelten Werte.¹⁾

Schließlich erhält man für das Feld *parabolischer Zylinder* in Punkten der x -Achse ein rationales Integral vierten Grades (vgl. §§ 19, 20), dessen Behandlung hier füglich unterbleibt.

Zusammenfassend kann man nach alledem aussagen, daß das Feld schräger und normaler Prismenflächen, kreisförmiger und parabolischer „zentrierter“ Zylinderabschnitte für jeden Punkt der x -Achse durch geschlossene Formeln darstellbar ist. Dasselbe gilt für das Feld einer oder zweier Armaturen, die aus solchen Elementen aufgebaut werden.

Ähnlich wie bei Rotationskörpern (§ 21) läßt sich dann aber auch für diese zweidimensionalen Aufgaben das Feld bzw. dessen Potential theoretisch für beliebige Feldpunkte angeben. Für letzteres gilt hier²⁾

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

1) Hieraus ergeben sich ohne weiteres die Entmagnetisierungsfaktoren unendlich langer elliptischer Vollzylinder

$$N_x = \frac{4\pi}{m + 1}, \quad N_y = \frac{4\pi m}{m + 1}, \quad N_z = 0.$$

Sie genügen der Bedingung $N_x + N_y + N_z = 4\pi$. Für einen Kreiszyylinder ($m = 1$) wird $N_x = N_y = 2\pi$. Vgl. übrigens H. du Bois, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 305. 1913, wo diese einfachen Formeln auch mittels der Potentialtheorie des Ellipsoids hergeleitet sind.

2) Hieraus und aus den bekannten Stetigkeitsbedingungen läßt sich das Feld mitunter schon bestimmen. So z. B. verfuhr J. Stefan, Wied. Ann 17. p. 942. 1882 bei der Behandlung eines Hohlzylinders, die ich

§ 38. *Attraktorische Einzelarmaturen.* Zunächst ist für eine lange schmale Armatur (Querschnitt und Stärke pro Längeneinheit S_1 bzw. $\Im S_1$) in größeren Abständen x , wo sie als linear gelten kann, offenbar

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= 2 \frac{\Im S_1}{x}, & \mathfrak{H}^2 &= 4 \frac{(\Im S_1)^2}{x^2}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} &= -2 \frac{\Im S_1}{x^2}, & \frac{\partial (\mathfrak{H}^2)}{\partial x} &= -8 \frac{(\Im S_1)^2}{x^3}, & \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} &= 4 \frac{\Im S_1}{x^3}.\end{aligned}$$

Betrachtet man ferner die Wirkung zweier Elementarstreifen auf einen Achsenpunkt (vgl. hierzu Fig. 8), so gilt dafür Tab. 4.

Der Ausdruck $\sin^3 \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha$ durchläuft ein negatives bzw. positives Maximum für die Wurzeln der Gleichung

$$12 \cos^4 \alpha - 10 \cos^2 \alpha + 1 = 0,$$

nämlich $\cos \alpha = \frac{1}{6} \sqrt{15 \pm 3\sqrt{13}}$ oder $\alpha = 32^\circ 8'$ bzw. $70^\circ 4'$.

Tabelle 4.

I	$d \mathfrak{H}_x = 4 \Im (\sin \alpha \cos \alpha) \frac{d \eta}{\eta}$	ausgezogen	max.	für 45°
II	$\frac{\partial (d \mathfrak{H}_x)}{\partial x} = -4 \Im (\sin^3 \alpha \cos 2 \alpha) \frac{d \eta}{\eta^2}$	punktiert	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pos. max.} & \text{„ } 90^\circ \\ \text{Null} & \text{„ } 45^\circ \\ \text{neg. max.} & \text{„ } 30^\circ \end{array} \right.$	
III	$\frac{\partial^2 (d \mathfrak{H}_x)}{\partial x^2} = 4 \Im (\sin^3 \alpha \cos 3 \alpha) \frac{d \eta}{\eta^3}$	strichpunktiert	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{neg. max.} & \text{„ } 67^\circ 30' \\ \text{Null} & \text{„ } 30^\circ \\ \text{pos. mag.} & \text{„ } 22^\circ 30' \end{array} \right.$	
IV	$\frac{\partial (d \mathfrak{H}_x)^2}{\partial x} = 32 \Im^2 (\sin^3 \alpha \cos \alpha \cos 2 \alpha) \frac{d \eta d \eta}{\eta^2}$	ge- strichelt	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pos. max.} & \text{für } 70^\circ 4' \\ \text{Null} & \text{„ } 45^\circ \\ \text{neg. max.} & \text{„ } 32^\circ 8' \end{array} \right.$	
V	$\frac{\partial d (\mathfrak{H}_x^2)}{\partial x} = 32 \Im^2 (\sin^3 \alpha \cos \alpha \cos 2 \alpha)$ funet $(\eta) d \eta$	—		

Der Kurvenverlauf ist dem für Kegelarmlaturen abgebildeten ähnlich (Fig. 8). Aus Tab. 4 geht hervor, daß das stärkste

dann (Wied. Ann. 63. p. 352. 1897) auf mehrere konzentrische Kreiszylinder ausdehnte. H.S. Hele-Shaw u. A. Hay, Phil. Trans(A) 195. p. 323. 1900 verallgemeinerten weiter und untersuchten konfokale elliptische Zylinder. So fanden sie für einen elliptischen Vollzylinder, dessen x -Achse einem Außenfelde vom Linearpotential T_0 parallel ist, das im Innern induzierte Potential $T_i = T_0 (1 - \mu)/(m + \mu)$, entsprechend dem oben angegebenen Werte $N_x = 4\pi/(m + 1)$, wie leicht nachzuweisen.

Feld dem Winkel 45° entspricht und daß bei zwei gleichkantigen Prismen die größte Gleichförmigkeit bei $\alpha = 30^\circ$ erreicht wird, wofern keine Stirnflächen auftreten. Ebenso entspricht auch wieder letzterer Winkel der größten Anziehung eines Einzelprismas auf gesättigte Partikel; folglich sind die wirksamen Elemente auf einem Prisma dieses Halbwinkels anzuordnen zwischen den Grenzen $\eta = b$ und $\eta = B$. Bei ungesättigten Partikeln erhält man die größte Anziehung für Kegel von $32^\circ 8'$, die maximale Abstoßung bei solchen von $70^\circ 4'$ Halbwinkel. Praktisch wird der Halbwinkel maximaler Attraktion auf ca. 31° zu normieren sein (vgl. § 22).

§ 39. Für ein Einzelprisma lautete Gleichung (20*) nach geringer Umformung

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} = 2 \Im \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \left[\frac{x \operatorname{tg} 2\alpha + 2B}{x^2 \sin^2 \alpha + xB \sin 2\alpha + B^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg} 2\alpha + 2b}{x^2 \sin^2 \alpha + x b \sin 2\alpha + b^2} \right]$$

was für die Schnittkante ($x = 0$) übergeht in

$$\frac{\partial \Phi_1(0)}{\partial x} = 4 \Im \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{b} \right).$$

Setzt man obigen Klammerausdruck Null, so erhält man eine quadratische Bedingungsgleichung, für deren Wurzeln

$$x = -\frac{1}{2} \cot \alpha [B + b \pm \sqrt{(B + b)^2 + 4Bb(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha)}]$$

$\Phi_1(x)$ Maximalwerte aufweist. Für $\alpha = 45^\circ$ werden die Wurzeln $x = 0$ und $x = -(B + b)$; für sehr kleine Wert von b dagegen $x = 0$ und $x = -B \cot \alpha$, d. h. Feldmaxima entgegengesetzten Zeichens liegen dann im Basispunkte K und der Schnittkante O des Prismas (Fig. 3). Bei zunehmenden Werten von b rückt das Maximum von K nach links, dasjenige von O nach links (rechts) je nachdem $\alpha < (\text{bzw. } >) 45^\circ$. Die zweite Derivierte wird im allgemeinen in irgend einem Achsenpunkte schwinden; für $\alpha = 30^\circ$ findet das im Punkte $x = 0$ statt. Für eine ebene Stirnfläche war nach Gleichung (18*)

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} = 4 \Im \left[\frac{b_0}{x^2 + b_0^2} - \frac{b}{x^2 + b^2} \right].$$

Der Klammerausdruck schwindet für $x = \pm \sqrt{b_0 b}$; wenn b_0 und b nicht allzu verschieden sind, kann das arithmetische

Mittel statt des geometrischen eingeführt werden, also $x = \pm (b_0 + b)/2 = \pm b_1$. Ein langes magnetisiertes Flachrohr von rechteckigem Querschnitt erzeugt demnach eine maximale Wirkung in einem Abstände b_1 von seiner ebenen Mündung, welcher der mittleren Halbbreite gleich ist.

Die Diskussion der Attraktion kreisförmiger und parabolischer Zylinderarmaturen kann hier unterbleiben.

III. Ungleichförmig magnetisierte Armaturen.

§ 40. Bisher wurde an der anfänglichen Voraussetzung des § 1 festgehalten, daß die Magnetisierung gleichförmig sei und dementsprechend Polelemente ausschließlich an Endflächen auftreten. Diese erste Annäherung stimmte bislang mit der Erfahrung vielfach gut überein. Allerdings ist der Hauptzweck der Magnetarmaturen, starke Felder zu erzeugen, und war eine Prüfung der Rechnung stets Nebensache; sie erfolgte denn auch nicht allzu genau. Zweifellos ergeben stark erregte, neuere Elektromagnete zwischen Kegelarmaturen bis zu etwa 10 Proz. intensivere Felder, als sich nach den bisherigen Formeln aus der Armaturengestalt errechnen lassen, unter Berücksichtigung des direkten Spulenfeldes. Es lag zwar nahe, daraus zu schließen, daß der Magnetisierungswert des besten Eisens noch erheblich über 1700 CGS. steigen könne. Nach neueren Messungen scheint dies aber doch nicht der Fall zu sein¹⁾ und es fragt sich nun, wie jener an sich recht erfreuliche Überschuß sonst zu erklären ist.

Wenn das eingeprägte Spulenfeld \mathfrak{H} , überall parallel der x -Achse gerichtet ist und unbegrenzt wüchse, so müßte nach einem Kirchhoffschen „Sättigungssatz“ die Richtung der Magnetisierung sich ihm überall nähern und ihr Wert dem überhaupt möglichen Maximalwert zustreben.²⁾ Das selbstentmagnetisierende Feld \mathfrak{H}' , würde dabei gegenüber \mathfrak{H} , immer

1) Nach E. Gumlich, *Elektrotechn. Zeitschr.* 30. p. 1067, 1096. 1909; *Zeitschr. für Elektrochemie* 15. p. 597. 1909 und P. Weiss, *Journ. de Phys.* (4) 9. p. 373. 1910 kann man als Grenzwerte in Feldern über 2 Kilogauss betrachten $\mathfrak{J} = 1710$, bzw. $4\pi \mathfrak{J} = 21500$ CGS. Vgl. auch B. Beattie u. H. Gerard, *Electrician* 64. p. 750, 811. 1910.

2) G. Kirchhoff, *Crelles Journ.* 48. p. 390. 1853; *Ges. Abhandl.*, p. 223, Leipzig 1882.

mehr zurücktreten; zugleich würde die Streuung nach außen zu stets geringer. Ein Bündel ungebrochener paralleler Induktionslinien würde einer Permeabilität $\mu = 1$ entsprechen.

§ 41. Wie verhalten sich nun die tatsächlich erreichbaren Zustände im Vergleich zu jener idealen Grenzkonfiguration? Betrachtet man etwa ein Feld \mathfrak{H}_i von 61,5 Kilogauss zwischen den Stirnflächen von Kegelstutzpolen (Fig. 3, Luftschlitz $3 \times 0,1$ mm), so beträgt die Totalinduktion \mathfrak{B}_i' unmittelbar hinter denselben bei H ebensoviel; rechnet man den Grenzwert $4\pi\mathfrak{S} = 21500$ CGS. ab, so wird innerhalb der Armatur

$$\mathfrak{H}_i' = \mathfrak{B}_i' - 4\pi\mathfrak{S} = 61,5 - 21,5 = 40 \text{ Kilogauss.}$$

Sofern hiervon nicht viel mehr als 4 Kilogauss auf das direkte Spulenfeld entfallen, wird das selbsterzeugte Feld

$$\mathfrak{H}_i' = \mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_i' = 36 \text{ Kilogauss rund.}$$

Dieses wirkt hier nahe dem Interferrikum im gleichen Sinne wie das eingeprägte Feld, welches es also noch weit übertrifft. Die Permeabilität beträgt immerhin noch mindestens $\mu = \mathfrak{B}_i'/\mathfrak{H}_i' = 61,5/40 = 1,54$ und nimmt seitlich von der Achse erheblich zu, so daß an den schrägen Flächen noch eine starke Brechung der Induktionslinien stattfindet. Der Wert von \mathfrak{H}_i' wird rasch geringer, wenn man sich auf der x -Achse von H nach K bewegt (Fig. 3) und läßt sich nach §§ 12, 23 berechnen; schließlich wird er sogar dem Spulenfeld entgegengesetzt sein und das resultierende Feld nur noch gerade Sättigung, d. h. Induktionswerte $\mathfrak{B}_i' = 4\pi\mathfrak{S} = 21500$ CGS. erzeugen können. Der Zunahme der Induktion von K bis H muß eine, ihr umgekehrt proportionale Abnahme des Induktionsröhren-Querschnitts entsprechen, d. h. eine Konvergenz der Vektorröhren statt eines parallelen Verlaufes, wie im Kirchhoffschen idealen Grenzzustande. Dieser wird nach alledem hier, ebenso wenig wie in sonstigen praktischen Fällen, noch nicht erreicht, da ja die Spulenfelder niemals über einige Kilogauss hinausgehen.

§ 42. In der Vektorgleichung $\mathfrak{B}_i' = \mathfrak{H}_i' + 4\pi\mathfrak{S}$ wird nahe den Stirnflächen das erste Glied von gleicher Ordnung wie das zweite und übertrifft es sogar, woran sich weitere Folgerungen schließen. In den meisten praktischen Fällen prädoppiert hingegen das Glied $4\pi\mathfrak{S}$ derart, daß sehr nahe $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_i'/4\pi$ zu setzen ist. Die Magnetisierung unterscheidet

sich dann von der Totalinduktion nur durch den Zahlenfaktor und teilt deren fundamentale Eigenschaft der solenoidalen Verteilung; mithin treten im Innern keine Quellen und Senken auf und die Wirkung geht nur von der Oberfläche aus. Im Gegensatz zu diesem nach der älteren Theorie allgemeingültigen Verhalten habe ich gezeigt¹⁾, daß die Induktion komplex lamellar-solenoidal, dagegen die induzierte Magnetisierung nur mindestens komplex lamellar verteilt sein müsse; Hysteresis spielt im Sättigungsgebiet keine merkliche Rolle. Die bekannte analytische Bedingung hierfür lautet:

$$\mathfrak{Z}_x \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial y} \right) + \mathfrak{Z}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{Z}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial x} \right) = 0,$$

oder kürzer $\mathfrak{Z} \text{ rot } \mathfrak{Z} = 0$. Die Vektorverteilung wird dann von einer orthogonalen Flächenschar in komplexe Lamellen zerteilt; im allgemeinen brauchen nun weder $\text{rot } \mathfrak{Z}$ noch $\text{div } \mathfrak{Z}$ zu schwinden. Eine magnetische Wirkung geht nur aus von solchen Stellen, wo die „Stärke“ der \mathfrak{Z} -Vektorröhren plötzliche oder stetige räumliche Variationen erleidet; dies wird ausgedrückt durch die bekannte Gleichung

$$r = \int \frac{\mathfrak{Z}_z}{\varrho} dS - \int \frac{\text{div } \mathfrak{Z}}{\varrho} dx dy dz.$$

Darin spielt jetzt das zweite Raumintegral eine Rolle neben dem sonst ausschließlich berücksichtigten, überwiegenden ersten Flächenintegrale.²⁾ Die angenäherte Schätzung des Volumintegrals soll an einem möglichst einfachen Beispiel erläutert werden, wobei $\text{div } \mathfrak{Z}$ noch ziemlich konstant bleibt.

§ 43. Dazu muß erst der Verlauf der konvergierenden Induktionslinien im Eisen bestimmt sein, welcher der üblichen divergenten Ausbreitung in der Nähe senkrechter Stirnflächen von Stäben oder geschlitzten Ringen³⁾ entgegenläuft. Wenn diese sich experimentell auch nicht tiefer ins Eisen verfolgen

1) H. du Bois, Verh. d. Phys. Ges. Berl. 9. p. 83. 1890; Wied. Ann. 46. p. 491. 1892.

2) Im vorliegenden Falle nicht solenoidaler Magnetisierung ist die entsprechende Poissonsche Oberflächenverteilung mit der sog. Gauss'schen Verteilung nicht identisch.

3) Vgl. z. B. H. du Bois, Magn. Kreise, Figg. 7, 17, Berlin 1894. R. Eppler, Dissert. Tübingen 1910, versuchte eine überwiegend mathematische Bearbeitung dieser Frage (μ konstant).

lassen, so können sie doch nahe der Grenzfläche folgendermaßen bestimmt werden: Einmal liefert die Kontinuität der normalen Induktionskomponente \mathfrak{B}_n die Beziehung

$$\mathfrak{H}_n = \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}'_n = \mathfrak{H}'_n + 4\pi \mathfrak{I}_n = \mathfrak{H}' \cos \delta' + 4\pi \mathfrak{I}_n,$$

wobei die Striche sich auf das Innere beziehen. Die Stetigkeit der tangentialen \mathfrak{H}_t -Komponente gibt zweitens, wenn δ und δ' die Brechungswinkel bezeichnen (vgl. Fig. 9) die Gleichung:

$$\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}'_t = \mathfrak{H}' \sin \delta'.$$

Durch Eliminierung von \mathfrak{H}' erhält man aus beiden Gleichungen das tangential Brechungsgesetz in der Form:

$$\operatorname{tg} \delta' \left(1 - \frac{4\pi \mathfrak{I}_n}{\mathfrak{H}_n} \right) = \operatorname{tg} \delta.$$

Hierin sind \mathfrak{H}_n und δ der Messung in der Luft zugänglich; unbekannt sind δ' und \mathfrak{I}_n . Letztere Komponente könnte man durch Messung des Kerreffektes direkt ermitteln, falls der Armatur ein spiegelnder Streifen anpoliert würde.¹⁾ Wenn die Magnetisierung überall merklich ihren Maximalwert \mathfrak{I}_m erreicht, so ist einfach $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_m \cos \delta'$ und es wird

$$(34) \quad \operatorname{tg} \delta' - \frac{4\pi \mathfrak{I}_m}{\mathfrak{H}_n} \sin \delta' = \operatorname{tg} \delta.$$

Diese Gleichung läßt sich entweder auf eine biquadratische reduzieren oder durch Probieren lösen. Betreffs des weiteren Verlaufes verspricht die Betrachtung analoger Probleme Erfolg: Zunächst die elegante hydrokinetische Methode der Herren Hele-Shaw und Hay, welche eine übersichtliche Abbildung zweidimensionaler Probleme gestattet, freilich unter Annahme konstanter Permeabilität. Ihre l. c. gegebenen Figg. 25, 27, 28 entsprechen prismatischen Stirnflächen, Figg. 26, 29, 30 Prismenkannten und Fig. 35 unserem abgestutzten Prismenarmaturenpaare mit ziemlich spitzem Winkel; im ersten Falle divergieren die Strömungslinien, im zweiten konvergieren sie, im dritten ist das Konvergenzbüschel merklich geradlinig.

Ferner habe ich das analoge elektrische bzw. thermische Leitungsproblem herangezogen und dabei die Variation der Permeabilität nachgeahmt. Im nachfolgenden Aufsatz (§§ 29, 30)

1) H. du Bois, Wied. Ann. 39. p. 32. 1890.

werden diese Verfahren an Beispielen näher erläutert; auf Grund jener Ergebnisse erscheint in zweiter Annäherung die einfachste Annahme statthaft, daß die stets gleichgerichteten \mathfrak{B} -, \mathfrak{H} - und \mathfrak{J} -Vektorlinien im Prisma oder im Kegel merklich geradlinig gegen einen Achsenpunkt C , um A vom Mittelpunkt O

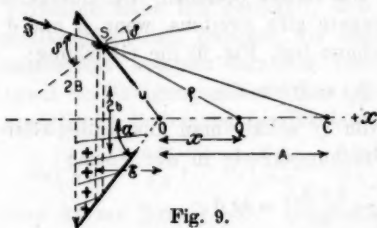


Fig. 9.

entfernt, konvergieren (Fig. 9) und zwar sowohl für die entsprechenden zweidimensionalen Prismen wie für das Kegelproblem, welches der bisherigen Reihenfolge gemäß zuerst behandelt sei.

§ 44. *Abgestutzter Kegel.* Die Vektorröhren seien demnach dünne quadratische Pyramiden, deren gemeinsame Spitze in C liege; die Orthogonalen sind Kugelflächen. Während nun \mathfrak{B} , umgekehrt proportional dem quadratischen Querschnitt variiert, bleibt der Sättigungstensor \mathfrak{J} numerisch konstant, d. h. die magnetische „Stärke“ nimmt nach der Spitze zu ab und ihre Variation bedingt Quellen bzw. Senken. Es läßt sich leicht zeigen, daß für eine solche Vektorröhre

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{J}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{J}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{J}_z}{\partial z} = 0 - \frac{\mathfrak{J}}{A + x} - \frac{\mathfrak{J}}{A + x} = -\frac{2\mathfrak{J}}{A + x}$$

Wenn man die Krümmung der Orthogonalflächen vernachlässigt, erhält man eine untere Grenze für das Teilfeld \mathfrak{H}' , erzeugt von einer Elementarscheibe des Kegels:

$$d\mathfrak{H}'(0) = -2\pi \operatorname{div} \mathfrak{J}(1 - \cos \alpha) dx = 4\pi \mathfrak{J}(1 - \cos \alpha) \frac{dx}{A + x}$$

und es wird das bestimmte Integral

$$(35) \quad \mathfrak{H}'(0) = 4\pi \mathfrak{J}(1 - \cos \alpha) \log \frac{A + B \cot \alpha}{A + b \cot \alpha},$$

und zwar zwischen der Stirnfläche ($x = b \cot \alpha$) und der Kegelbasis ($x = B \cot \alpha$); von den etwa noch weiterliegenden und schwächeren Quellpunkten in den angrenzenden Schenkelteilen ist hierbei abgesehen. Auch für beliebige Achsenpunkte $Q(x)$ läßt sich die Integration von $\mathfrak{H}'(x)$ in ähnlicher Weise durchführen. Wenn A groß ist gegen B , ergibt die Entwicklung des Logarithmus

$$\mathfrak{H}'(0) = 4\pi \mathfrak{J} \frac{B - b}{A} \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$$

dieser Ausdruck wird alsdann ein Maximum für

$$\cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 = 0,$$

wobei nur die Wurzel $\cos 51^\circ 50' = +0,618$ in Betracht kommt, was dem gewöhnlichen Optimumwinkel $54^\circ 44'$ nahe liegt. Freilich wird die zu letzterem führende Rechnung in zweiter Annäherung folgendermaßen abzuändern sein (Fig. 9). Die Normalkomponente der Magnetisierung in S beträgt $\Im \cos \delta'$; eine Elementarzone trägt jetzt die „Flächenbelegung“ $2\pi \Im u \sin \alpha \cos \delta' du$; daher ist

$$d\mathfrak{H}_2(0) = \frac{2\pi \Im \sin \alpha \cos \alpha \cos \delta' du}{u}.$$

Das Dreieck OCS ergibt $\cos \delta' = A \sin \alpha / \sqrt{A^2 + u^2 + 2Au \cos \alpha}$ und daher wird

$$d\mathfrak{H}_2(0) = 2\pi \Im \frac{A \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sqrt{A^2 + u^2 + 2Au \cos \alpha}} \cdot \frac{du}{u}.$$

§ 45. Differentiert man dies nach α , so wird die Bedingung für ein Maximum

$$5 \frac{u}{A} \cos^3 \alpha + 3 \left(1 + \frac{u^2}{A^2}\right) \cos^2 \alpha - \frac{u}{A} \cos \alpha - \left(1 + \frac{u^2}{A^2}\right) = 0.$$

Für $u/A = 0$ erhält man einerseits wieder $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}} = 54^\circ 44'$; andererseits wird u/A kaum die Einheit übertreffen, und zwar nur für nahen Konvergenzpunkt und periphere Elementarzone; für $u/A = 1$ hat die kubische Gleichung eine Wurzel $\cos \alpha = 0,5403$ oder $\alpha = 57^\circ 18'$; der Kegelhalbwinkel sollte also nach der Peripherie etwas zunehmen in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Bei der Integration von $d\mathfrak{H}_2(0)$ kann man einen konstanten mittleren Halbwinkel annehmen und erhält zwischen den Grenzen $u = b/\sin \alpha$ und $u = B/\sin \alpha$ ein Teilfeld

$$(36) \mathfrak{H}_2(0) = 2\pi \Im \sin^2 \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{B}{b} - \log \frac{A \sin \alpha + B \cos \alpha + \sqrt{A, B}}{A \sin \alpha + b \cos \alpha + \sqrt{A, b}} \right],$$

wobei wieder:

$$\sqrt{A, B} = \sqrt{A^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \cos \alpha + B^2}.$$

Für $A = \infty$ schwindet das zweite Glied. Für beliebige Achsenpunkte führt die Integration von $d\mathfrak{H}_2(x)$ im allgemeinen auf elliptische Integrale; nur für den Konvergenzpunkt läßt sich $d\mathfrak{H}_2(A)$ glatt integrieren. Auf das Teilfeld der Stirnflächen, \mathfrak{H}_1 , hat eine schwache Konvergenz keinen merklichen Einfluß; addiert man nun \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_2 und \mathfrak{H}' , so wird schließlich

$$(IX) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}(0) &= 4\pi\mathfrak{Z} \left[\sinvers \beta \right. \\ &+ \sin^2 \alpha \cos \alpha \left(\log \frac{B}{b} - \log \frac{A \sin \alpha + B \cos \alpha + \sqrt{A, B}}{A \sin \alpha + b \cos \alpha + \sqrt{A, b}} \right) \\ &\quad \left. + 2 \sinvers \alpha \log \frac{A \operatorname{tg} \alpha + B}{A \operatorname{tg} \alpha + b} \right]. \end{aligned} \right.$$

Nimmt man in Anlehnung an die mitzuteilenden Messungen an: $4\pi\mathfrak{Z} = 21500$ CGS., $2a = 0,05$ cm, $2b = 0,36$ cm, $2B = 9,0$ cm, $\alpha = 54^\circ 44'$, $\beta = \arctg 7,2 = 82^\circ 6'$, so ergibt die Rechnung folgende Werte für das Gesamtfeld $\mathfrak{H}(0)$:

für $A = \infty$	21500 [0,862 + 1,220 - 0 + 0]	= 44700 Gauss.
$A = 9$ cm	21500 [0,862 + 1,220 - 0,124 + 0,243]	= 47400 Gauss.
$A = 3$ cm	21500 [0,862 + 1,220 - 0,304 + 0,551]	= 50200 Gauss.

Das subtraktive dritte Glied wird demnach von dem additiven vierten etwa ums Doppelte übertroffen und die Konvergenz der Induktionslinien bedingt schließlich eine recht merkliche Erhöhung des Feldes, welche bei weiterer Annäherung an den Kirchhoffschen Grenzzustand ($\mu = 1$) sich wieder verlieren müßte. Die dazu erforderlichen direkt eingepprägten Spulenfelder würden freilich den Verlust mehr als kompensieren, sind aber praktisch kaum zu verwirklichen.

§ 46. *Abgestutztes Prisma.* Im Normalprofil Fig. 9 seien die Vektorröhren nunmehr keilförmig mit einer gemeinsamen Schnittkante in C ; die Orthogonalflächen sind jetzt Kreiszylinder. Es ist hier

$$\operatorname{div} \mathfrak{Z} = \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial z} = 0 - \frac{\mathfrak{Z}}{A + \xi} + 0.$$

Man erhält wieder eine untere Grenze für das Teilfeld, erzeugt von einer Elementarscheibe des Prismas ($2c = \infty$)

$$d\mathfrak{H}'(0) = -4\mathfrak{Z} \operatorname{div} \mathfrak{Z} \cdot \alpha \cdot d\xi = 4\mathfrak{Z} \alpha \frac{d\xi}{A + \xi}.$$

Das Integral wird, ähnlich wie oben

$$(35^*) \quad \mathfrak{H}'(0) = 4\mathfrak{Z} \alpha \log \frac{A + B \cot \alpha}{A + b \cot \alpha};$$

oder für große Werte von A

$$\mathfrak{H}'(0) = 4\mathfrak{Z} \frac{B - b}{A} \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Für kleine Winkel ist nun $\alpha/\operatorname{tg} \alpha = 1$ und nimmt dann allmählich ab; für $\alpha = 45^\circ$ sinkt der Wert auf $\pi/4$. Dieser

oben hergeleitete Optimumwinkel ist indessen folgendermaßen zu modifizieren. Ähnlich wie oben (§ 44) erhält man

$$d\mathfrak{S}_2(0) = 4\mathfrak{S} \frac{A \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{A^2 + u^2 + 2Au \cos \alpha}} \frac{du}{u}.$$

Die Bedingung für ein Maximum wird jetzt

$$3 \frac{u}{A} \cos^3 \alpha + 2 \left(1 + \frac{u^2}{A^2}\right) \cos^2 \alpha - \frac{u}{A} \cos \alpha - \left(1 + \frac{u^2}{A^2}\right) = 0.$$

Für $u/A = 0$ erhält man wieder $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}} = 45^\circ$; andererseits gibt es für $u/A = 1$ eine Wurzel $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ oder $\alpha = 48^\circ 11'$. Die Integration von $d\mathfrak{S}_2(0)$ ergibt wie oben ein Teilfeld

$$(36^*) \quad \mathfrak{S}_2(0) = 4\mathfrak{S} \sin \alpha \cos \alpha \left[\log \frac{B}{b} - \log \frac{A \sin \alpha + B \cos \alpha + \sqrt{A, B}}{A \sin \alpha + b \cos \alpha + \sqrt{A, b}} \right].$$

Bringt man ferner bei \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 die Korrekturen für die endliche Prismenlänge nach § 28 an und addiert \mathfrak{S}' dazu, so erhält man als Gesamtfeld für ein gleichkantiges Prismenpaar:

$$(IX^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{S}(0) &= 8\mathfrak{S} \left[\arctg \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}} \right. \\ &+ \sin \alpha \cos \alpha \left(\log \frac{B}{b} - \log \frac{B^2 \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)}{b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{c^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)} \right. \\ &\left. \left. - \log \frac{A \sin \alpha + B \cos \alpha + \sqrt{A, B}}{A \sin \alpha + b \cos \alpha + \sqrt{A, b}} \right) + \alpha \log \frac{A \tg \alpha + B}{A \tg \alpha + b} \right]. \end{aligned} \right.$$

Unter der Annahme $8\mathfrak{S} = 13700$ CGS., $2a = 0,05$ cm, $2b = 0,36$ cm, $2c = 8,4$ cm, $\alpha = 47^\circ$, welche den tatsächlich untersuchten Prismenpolen entspricht, findet man für $\mathfrak{S}(0)$:

für $A = \infty$	$13700[1,433 + 1,608 - 0,167 - 0 \quad + 0] = 39400$ Gauss,
$= 9$ cm	$13700[1,433 + 1,608 - 0,167 - 0,163 + 0,301] = 41200$ Gauss,
$= 4,5$ cm	$13700[1,433 + 1,608 - 0,167 - 0,286 + 0,512] = 42400$ Gauss.

Auch hier erhöht die Konvergenz der \mathfrak{S} -Linien das Feld, wenn auch weniger als bei Kegelarmaturen.

Schließlich erklärt die Annahme von inneren Quellen und Senken in der linken bzw. rechten Armatur die tatsächlichen Vorgänge so ungezwungen, daß deren Vorhandensein kaum bezweifelt werden kann; es erscheint zweckmäßig, diesen be-

sonderen Zustand mit dem Ausdruck „Übersättigung“ (Super-saturation) zu kennzeichnen.

§ 47. Die Ungleichförmigkeit der Magnetisierung kann ferner durch zufällige oder absichtliche Inhomogenität der Armaturen bedingt sein. Hr. Weiß hat z. B. vorgeschlagen, das Ferrokobalt (Fe_2Co) zu verwerten, dessen Maximalmagnetisierung diejenige des Eisens um 10 Proz. übertrifft, und möglicherweise findet man noch höher gesättigtes Material. Sofern dessen Verwendung zur Herstellung der ganzen Armatur, geschweige denn der Magnetholme, nicht in Frage kommen kann, läßt sich auch schon ein Kern vorteilhaft anbringen. Ist dieser etwa so gestaltet (vgl. nachstehenden Aufsatz, Fig. 8), daß er sich der Richtung der Magnetisierungslinien anschmiegt, so wird die innere Trennungsfläche weder Brechung noch Polelemente bedingen. Nennt man den Magnetisierungsüberschuß $\Delta\mathfrak{J}$, so ist die Wirkung der vorderen Stirn- und Kegelfläche (größter Halbmesser B') nach dem Vorigen ohne weiteres hinzuschreiben. Davon ist die Wirkung der Rückfläche indessen zu subtrahieren; wenn diese auch bei nicht allzu kurzem Kern nicht sehr erheblich ist, darf man sie keineswegs vernachlässigen. Wenn β' ihren Gesichtshalbwinkel vom Zentrum O aus bezeichnet, so beträgt der Feldzuwachs

$$\Delta\mathfrak{H}(0) = 4\pi \Delta\mathfrak{J} \left[\sin\text{vers } \beta + \sin^2 \alpha \cos \alpha \log \frac{B'}{b} - \sin\text{vers } \beta' \right],$$

wobei die erste Annäherung genügen mag. Es ist leicht zu ersehen, daß der Kern im Verhältnis zu seinem geringen Volum eine bedeutende Verbesserung anbringt, da seine weitere radiale Ausbreitung nur eine logarithmische Zunahme des zweiten Gliedes, dagegen auch eine Vergrößerung des letzten Spbtrahends bedingt.

Zusammengesetzte Armaturen aus ungleichartigem Material haben schließlich Verwendung gefunden bei verschiedenen Modifikationen der Isthmismethode, wie sie die Herren Sir A. Ewing und Low, Osgood Peirce, Gumlich u. a. benutzten, sowie bei der Untersuchung des Kerreffekts durch verschiedene Beobachter. Die im Vorigen entwickelten Grundsätze lassen sich auf solche Spezialfälle ohne weiteres anwenden.

(Eingegangen 30. Juli 1913.)

3. Untersuchungen an Ringmagneten; von H. du Bois.

(Aus dem Bosscha-Laboratorium.)

§ 1. Zur Prüfung meiner Theorie des geschlitzten Toroids in einem größeren Maßstabe als sie seinerzeit von H. Lehmann durchgeführt wurde, entwarf ich im Jahre 1891 einen großen Ringelektromagnet (275 kg, 5 Kilowatt), welcher das Prototyp einer Reihe ähnlicher Apparate darstellt. Eben wegen dieser Eigenschaft als theoretisches Versuchsobjekt mußten dabei zwölf Sektorapulen ziemlich gleichmäßig am Umfang entlang verteilt werden. Indessen ergab sich von vornherein, daß im Sättigungsgebiet die Wickelung um so mehr an Wirksamkeit einbüßte, je weiter sie vom Interferrum abrückte; das deutet auf eine Sonderstellung der Polspulen, die bei reinen Gebrauchsapparaten konstruktiv zu berücksichtigen ist. Andere Ringmagnete wurden u. a. von den Herren Beattie, Apt, Skinner und Tool beschrieben¹⁾; auch werden geschlitzte Ringe jetzt in manchen technischen Meßinstrumenten verwendet.

Im Jahre 1898 wurde dann der Vollring zu einem handlicheren Halbring (175 kg, 2,5 Kilowatt) umgebildet; bei einem Normalschlitz 6×1 mm gaben diese Apparate ein Feld von 38—40, durchschnittlich über 39 Kilogauss. Auf Grund langjähriger Erfahrungen und gesteigerter Ansprüche wurde neuerdings eine weitere Durchbildung vorgenommen. Dabei wurden namentlich die Bedürfnisse der sehr erweiterten neueren Magnetoptik berücksichtigt, insbesondere der Zeeman-Effekt mit allen Begleiterscheinungen; dies erheischte u. a. einen

1) H. du Bois, Verh. d. Phys. Ges. Berlin. 3. p. 83. 1890; 11. p. 54. 1892; 13. p. 34. 1894; Wied. Ann. 46. p. 486. 1892; 51. p. 537. 1894; H. Lehmann, Wied. Ann. 48. p. 406. 1893; J. C. Beattie, Wien. Ber. 104. p. 656. 1895; R. Apt, Schrift. Nat. Ver. Schlesw.-Holst. 11. p. 104. 1898; C. A. Skinner u. A. Q. Tool, Phil. Mag. (6) 16. p. 839. 1908.

möglichst kurzen Lichtweg durch den Magnet. Für das zu erreichende Feld im Normalschlitz (6×1 mm) war 50 Kgs vorgesehen; das große Modell 1911 leistete dies mit 12 Kilowatt Verbrauch ohne ein Gewicht von 360 kg, über drei Einzelteile verteilt, zu überschreiten; in einem Schlitz $3 \times 0,5$ mm erhält man rund 55, mit Ferrokobalteinsatz 59 Kgs.¹⁾

Im folgenden sollen zunächst Untersuchungen über die Bewickelung eines alten Ringmagnets mitgeteilt werden, welche eine wesentliche Grundlage der verbesserten Konstruktion bilden. Es folgt eine kurze Beschreibung dieser letzteren. Schließlich werden Messungen der Intensität und Uniformität des Feldes sowie verschiedene damit zusammenhängende Versuche an den neuen Modellen besprochen.

I. Erregung, Streuung und Selbstinduktion des Vollringmagnets.

§ 2. *Lage der Erregerspulen.* Für ungesättigte — fast stets geschlossene — Toroide liegen Untersuchungen vor über den Einfluß teilweiser Bewickelung, entsprechend einer Lokalisierung der Erregung.²⁾ Diese ergaben übereinstimmend, daß die Lage der Spulen keine oder ganz untergeordnete Bedeutung hat und nur die gesamte Amperewindungszahl maßgebend ist. In der Hopkinsonschen Theorie des magnetischen Kreises wird diese Frage nicht explizite berührt; obiges Ergebnis, welches allerdings für geschlossene Kreise, z. B. Transformatoren, gilt, wurde indessen zuweilen stillschweigend auch auf magnetische Kreise im allgemeinen ausgedehnt.

Daß dies im Sättigungsgebiet unzulässig ist, das zeigten schon meine ersten Versuche. Das Streufeld in der Äquatorealebene, 2 m von der Achse entfernt, nahm bei wachsendem Erregerstrom rasch bis zu einem Höchstwert zu (bei einem

1) H. du Bois, Verh. d. Phys. Ges. Berlin. 17. p. 99. 1898; Ann. d. Phys. 1. p. 199. 1900; Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 357; 1899, 31. p. 362. 1911.

2) A. Oberbeck, Habil.-Schrift Halle 1878; L. Boltzmann, Wien. Anz. 22. p. 208. 1878; A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. 8. p. 554. 1879; L. Mues, Dissert. Greifswald 1893, Beibl. 18. p. 592. 1894; J. Sauter, Wied. Ann. 62. p. 85. 1897; vgl. H. du Bois, Magn. Kreise p. 146 ff. u. p. 285, Berlin 1894, und F. Niethammer, Magnetismus p. 19, Stuttgart 1901.

Polabstand von 11,3 mm etwa 1 Dezigauss) welcher bereits bei 7 Kiloamperewindungen erreicht wurde. Darauf nahm die Streuung allmählich wieder ab, bis sie bei der höchsten Erregung von 108 KAW. nur noch $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{3}$ — je nach dem Polabstand — jenes Wertes betrug; dies stimmt überein mit den Ergebnissen H. Lehmanns. An diesem Verhalten haben die beiden „Polspulen“ 1,1 (Fig. 1) einen vorwiegenden Anteil; wenn man

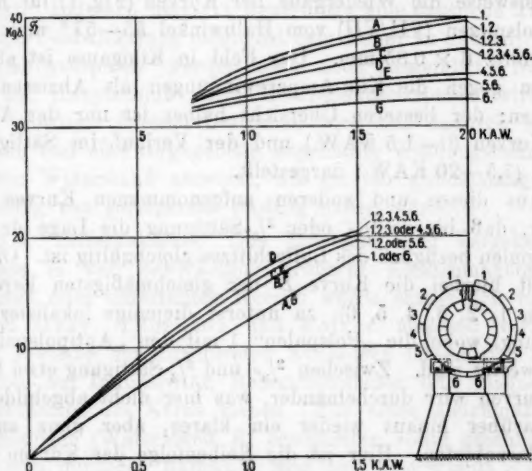


Fig. 1.

sie ausschaltete, nahm bei starker Erregung das Feld um 20 Proz. ab, während die Streuung 4—6 fach vergrößert wurde.¹⁾ Hierdurch kennzeichnet sich die durch den Kirchhoffschen Sättigungssatz begründete Sonderstellung jener Spulen; am besten würde der Raum um das Interferrum ebenfalls bewickelt, wie es schon H. Lehmann l. c. p. 424 durchführte; hierzu dienen jetzt bis zu einem gewissen Grade Sonderspulen.

§ 3. Die von vornherein geplanten systematischen Messungen wurden Anfang 1910 von Hrn. Morris Owen im hiesigen Laboratorium durchgeführt.²⁾ Die Spulen des Ring-

1) H. du Bois, Wied. Ann. 51. p. 544. 1894. Vgl. auch P. Weiss, Ed. électr. 15. p. 484. 1898; Journ. d. Phys. (4) 6. p. 355. 1907.

2) H. du Bois, Versl. Kon. Ak. Wet. Amst. 19. p. 398. 1910.

magnets (Fig. 1) mit je 200 Windungen von 0,18 Ohm Widerstand wurden verschiedenartig geschaltet, jedoch stets so, daß gleich numerierte, symmetrisch zum Luftschlitz, paarweise erregt waren. Dabei wurden Flacharmaturen, sowie Kegelstutzpole in verschiedenen Formen und Abständen benutzt. Das Feld wurde als Funktion der gesamten Erregung bestimmt; angesichts des in allen Fällen ganz ähnlichen Verlaufs genügt beispielsweise die Wiedergabe der Kurven (Fig. 1) für Kegelstutzpolspitzen (VII/VII) vom Halbwinkel $55-57^\circ$ und einen Luftschlitz $6 \times 0,85$ mm. Das Feld in Kilogauss ist als Ordinaten gegen die Kilo-Amperewindungen als Abzissen aufgetragen; der besseren Übersicht halber ist nur der Anfang der Kurven (0—1,5 KAW.) und der Verlauf im Sättigungsgebiet (7,5—20 KAW.) dargestellt.

Aus diesen und anderen aufgenommenen Kurven geht hervor, daß bis zu $\frac{1}{2}$ - oder $\frac{2}{3}$ -Sättigung die Lage der Erregerspulen bezüglich des Luftschlitzes gleichgültig ist. Obenan verläuft hierbei die Kurve *D* der gleichmäßigsten Erregung (Spulen 1, 2, 3, 4, 5, 6); zu unterst diejenige lokalisiertester Erregung, wobei die „Polspulen“ 1 mit den „Antipolspulen“ 6 gleichwertig sind. Zwischen $\frac{2}{3}$ - und $\frac{3}{4}$ -Sättigung etwa laufen die Kurven wirr durcheinander, was hier nicht abgebildet ist, um darüber hinaus wieder ein klares, aber ganz anderes Bild darzubieten. Hier ist die Reihenfolge der Kurven *A, B, C, D, E, F, G* auch diejenige der Spulennummern, derart, daß die Polspulen überwiegen, die Antipolspulen unterliegen und die gleichmäßige Bewickelung eine Mittelstellung einnimmt.

§ 4. Da es sich bei Elektromagneten für Laboratorien meistens um das Stadium der Sättigung bzw. Übersättigung handeln wird, ist die Überlegenheit der Polspulen hierfür erwiesen. Die gänzliche Weglassung der übrigen Schenkelwicklung scheint mir indessen doch nicht angebracht, da sie eine nützliche Reserve zur Erregung bei großen Polabständen liefern, wenn nur mangelhafte Sättigung auftritt. Auch können in besonderen Fällen die Polspulen im Wege stehen oder elektrostatisch störend wirken; bei magnetooptischen Messungen bedingen sie überdies oft eine nicht vernachlässigbare Rotation in der Luftstrecke.

Auch in der Elektrotechnik ist man empirisch von der

durch Hopkinsons Theorie begünstigten Auffassung zurückgekommen in dem Maße, als man zu höherer Sättigung (etwa $\mathfrak{B} = 20\,000$ CGS. in Ankerzähnen und engeren Luftspalten), überging. Die seinerzeit von Forbes vorgeschlagene, von Eickemeyer ausgeführte Erregerwicklung um den Anker wird zwar wegen Schwierigkeiten der Ventilation und der Zugänglichkeit nur noch bei gewissen stationären Drosselvorrichtungen benutzt. Indessen herrscht neuerdings eine deutliche Tendenz vor, die Feldwicklung möglichst dem Anker zu nähern; Typen mit „Antipolspulen“ werden kaum noch ausgeführt. Namentlich bei Hauptschluß- und Kompensationsspulen wirkt die Nähe günstig. Diesem Bestreben wird nur dadurch Einhalt geboten, daß eine vorgegebene angehäuften Windungszahl einen höheren Widerstand aufweist, als sie bei gleichmäßiger Bewicklung von geringerem Umfang haben würde.¹⁾

§ 5. *Selbstinduktion.* Das Entstehen und Vergehen des Stromes in der Bewicklung größerer Elektromagnete mit massiven oder unterteilten Kernen wurde namentlich von den Herren Gray, Thornton und Peirce messend verfolgt;²⁾ unter gewissen vereinfachenden Annahmen lassen sich daraus Schlüsse auf Induktivität, Relaxationsdauer und magnetische Eigenschaften des Kerns ziehen. Für einen gleichmäßig mit n Windungen (Widerstand R) bewickelten völlig geschlossenen Ring vom mittleren Radius r_1 und dem Querschnitt S ist das Spulenfeld $\mathfrak{H} = 2\pi I/r_1$; sodann beträgt die Eigeninduktivität

$$L = \frac{2n^2 S}{r_1} \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}},$$

und die Relaxationsdauer $\theta = L/R$. Diese Größen sind variabel und hängen laut der Definitionsgleichung auch ab von der Vorgeschichte des Eisens. Bezeichnet ferner \mathcal{E}_s die eingeprägte EMK., I_s den endgültigen Stationärstrom, I den variablen Strom, t die Zeit vom Stromschluß an gezählt, so gilt jederzeit

1) Diese Gesichtspunkte wurden dem Elektrotechn. Verein am 10. Jan. 1911 vorgetragen.

2) Th. Gray, Phil. Trans. 184A. p. 531. 1893; W. M. Thornton Phil. Mag. (6) 8. p. 620. 1904; B. Osgood Peirce, Proc. Amer. Acad. of Science 43. p. 99. 1907; 46. p. 541. 1911. Vgl. H. du Bois, Magnetische Kreise p. 249, 360.

$$\theta = \frac{L - I}{\frac{dI}{dt}}$$

Die Relaxationsdauer ist daher für einen Punkt P einer Stromentstehungskurve (Fig. 2) gleich der Tangente ihrer Neigung zur Ordinatenachse, multipliziert in die Ordinatenstrecke PQ . Der Inhalt der Figur $PQMOP$ ist proportional der Induktion \mathfrak{B} im Punkte P .

Für den aus schwedischem Schmiedeeisen bestehenden Ringmagnet war $n = 2400$; $S = 78,5$ qcm; $r_1 = 25$ cm; $\mathfrak{H} = 19,2$ I (Amp.). Für die von Null aufsteigende Kurve kann man den Höchstwert von $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ etwa auf 5000 schätzen; angenähert ergibt das $L = 180$ Henry und $\theta = 75''$ als Maximalwert.

§ 6. Es wurde seinerzeit für verschiedene Werte des Stationärstromes bzw. des mittleren Spulenfeldes \mathfrak{H} , die Frist bestimmt, welche nach Schließung des variablen Stromes I verging, bis dieser 90 Proz. seines Endwertes erreichte, und zwar einmal, wenn der durch Flachpole ohne Interferrum geschlossene Ring zuvor entmagnetisiert worden (t_1) und zweitens, wenn eine Magnetisierung im entgegengesetzten Sinne vorhergegangen war (t_2). Tab. 1 enthält diese Beobachtungen.

Tabelle 1.

$I = 0,05^* \text{ Amp.}$	$\mathfrak{H} = 0,96 \text{ Gauss}$	$I = 0,045 \text{ Amp.}$	$t_1 = -$	$t_2 = 180''$
0,10 "	1,92 "	0,090 "	98''	185''
0,15* "	2,88 "	0,135 "	—	106''
0,20 "	3,84 "	0,180 "	74''	128''
1,0 "	19,2 "	0,90 "	17''	—
1,5* "	28,8 "	1,35 "	—	20''
2,0 "	38,4 "	1,80 "	10''	—
5,0 "	96 "	4,50 "	5''	—

Später wurden dann vollständigere Messungen angestellt, woran sich Hr. D. Roberts beteiligte; sie erstreckten sich über die ganze Kurve des Entstehens und Vergehens. Der Stationärstrom variierte in weiten Grenzen; es seien hier nur einige Ergebnisse für schwächere Ströme angeführt, die in Tab. 1 mit * bezeichnet sind. Um den äußeren induktionsfreien Widerstand herabzudrücken, wurden Thermoelemente als Stromquelle benutzt; bei der äußerst langsamen Stromänderung

bedurfte es nicht etwa eines Oszillographen, sondern es genügte ein gut gedämpfter Strommesser.

§ 7. In Fig. 2 stellen 1 und 2 Stromentstehungskurven dar, bei denen der Ringmagnet zuvor durch Gegenstrom im entgegengesetzten Sinne magnetisiert worden war; daran schließen sich die Kurven des Stromabfalles bei Kurzschluß. Kurve 3 wurde nach Magnetisierung im gleichen Sinne erhalten und zeigt einen viel rascheren Anstieg. Wegen der

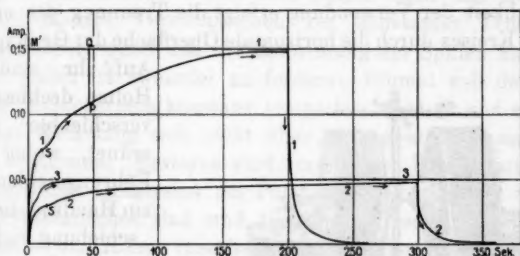


Fig. 2.

Schwierigkeit einer völligen Entmagnetisierung wurden Kurven von Null an nicht aufgenommen. Die eigentümlichen Einsenkungen dieser Kurven bei S entsprechen dem scharfen Maximum von $d\mathcal{B}/d\mathcal{H}$; es hält schwer, gerade dort einen genaueren Wert für die maximale Neigungstangente gegen die Stromachse zu gewinnen; außerdem üben die Wirbelströme im unzertheilten gut leitenden Schmiedeeisen einen erheblichen Einfluß.

Man kann nur aussagen, daß sich eine maximale Relaxationsdauer von der Größenordnung $100''$ aus Kurve 1 und 2 ergibt, was mit den berechneten $\theta_1 = 75''$ nicht im Widerspruch steht, da ja $d\mathcal{B}/d\mathcal{H}$ hierbei größer ist als der für die von Null aufsteigende Kurve geschätzte Wert 5000. Diese sehr langen Stromentstehungszeiten sind zwar interessant, aber in der Praxis recht unbequem; bei den neuen Apparaten sind sie denn auch meist kürzer (§ 31). Durch induktionsfreie Vorschaltwiderstände lassen sie sich sehr verringern; beispielsweise ist in Tab. 1 der Wert $t_s = 106''$ für $I_s = 0,15$ Amp. auffallend gering, weil dabei einige Ohm vorgeschaltet waren.

Der Stromabfall verläuft rascher, weil die Induktion ja nur

auf ihren remanenten Wert herabsinkt und in diesem Bereiche $d\mathcal{B}/d\mathcal{H}$ nicht so groß ist.

II. Beschreibung der neuen Halbringmagnete.¹⁾

§ 8. *Schwerstes und Großes Modell.* Die Grundplatte ruht nach Righis Vorgang auf einem Kugellager mit Teilkreis, wie es öfters erforderlich ist. Zwei seitliche Stellschrauben werden bei der zuweilen erwünschten vertikalen Stellung der Magnetachse benutzt. Im Interesse größerer Vielseitigkeit und Bequemlichkeit der Verwendung erfolgt die Trennung des magnetischen Kreises durch die horizontale Oberfläche der Grundplatte.

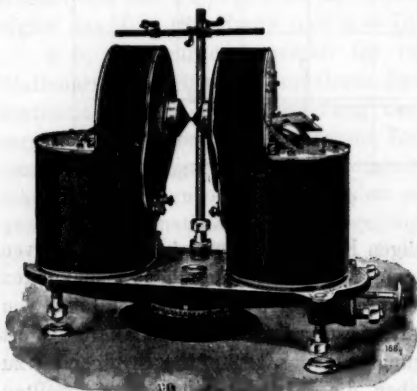


Fig. 3. $\frac{1}{16}$ nat. Gr.

Auf ihr sind die Holme drehbar und verschiebbar angeordnet, wobei eine Führungsschiene und ein Handrad die Verschiebung richten bzw. regulieren. Jeder Stahlgußholm bildet wie bisher ungefähr einen Drittelring, der nach unten in eine angegossene aufliegende Fußflansche ausläuft; Fig. 3 stellt das „große Modell“ dar.

Viele im hiesigen Laboratorium ausgeführte magneto-optische Untersuchungen gipfelten in der Forderung größter Lichtstärke, die nur durch Konzentrierung des Strahlenbündels behufs Erzeugung eines Spaltbildes im Interpolarraum zu erreichen ist; es bildet dann einen stark divergierenden Doppelkegel. Die Bohrung soll sich den Strahlen anschmiegen, und da ihre lichte Weite naturgemäß eine beschränkte ist, wird dadurch schon ein kurzer Strahlengang im Stahlguß be-

1) Eine ausführlichere Beschreibung mit Figuren und Gebrauchsanweisung erschien Ztschr. f. Instrumentenk. 31. p. 362. 1911, auf die wegen weiterer Einzelheiten hingewiesen sei.

dingt. Es werden demgemäß kurze konische Bohrungen im Verhältnis 1:5 angebracht; passende, bei nicht optischen Versuchen zu verwendende massive Kegelkerne werden beigegeben. Ferner ist eine eigenartige, zur Bohrung zentrische Ausfräsung und eine rechtwinklige Aussparung des Wickelungsraumes angeordnet, innerhalb deren optische und andere Hilfsvorrichtungen unmittelbar an die Mündung der Ausbohrung herangebracht werden können.

§ 9. Neuerdings macht sich immer mehr das Bedürfnis geltend, längere Versuchsreihen bei konstanter Temperatur durchzuführen, ohne daß die Erwärmung der Spulen nachteilig wird. Dabei ist zweierlei zu fordern: Einmal soll der interpolare Versuchsraum konstant temperiert werden, und zweitens soll die Wickelung sich nicht über eine gewisse Grenztemperatur erwärmen. Ersteres wird im hiesigen Laboratorium seit Jahren durch Immersion der Polspitzen selbst in ein thermo- bzw. kryostatisches Bad und thermischer Isolation gegen die Polschuhe und Holme innerhalb des Bereiches von -200° bis $+500^{\circ}$ bequem erreicht (vgl. § 16).

Auch sind die oberen Polkerne bei diesen Modellen mit einem Spülrohr umgeben, so daß deren Temperatur überhaupt kaum erhöht wird; außerdem kann für besondere Zwecke innerhalb der Bohrungen leicht eine Innenspülung besonders angebracht werden. Ferner hat sich die Kühlung der Polschuhe bzw. der Stirnflanschen durch sich anschmiegende Spiralen aus Kupferrohr oder biegsamem Metallschlauch — unter Zwischenlage von Stanniol — gut bewährt. Durch diese läßt man Eiswasser oder Leitungswasser, eventuell temperiert durch elektrische Schnellwasserwärmer, oder Dampf zirkulieren. Ähnliche Spiralen werden klinisch zum Kühlen von Körperteilen benutzt; sie sind vom Standpunkte der Fabrikation und der Betriebssicherheit der Wasserführung durch gelötete Blechgebilde vorzuziehen, wobei die geringste Undichtigkeit im Innern zu Durchnässung, „Körperschluß“ und anderen Schwierigkeiten führen kann. Die Mitbenutzung der Spülrohre zur Stromführung bzw. hohler Stromleiter zur Spülung wurde zwar anfangs erwogen, jedoch ebenfalls fabrikatorisch weniger geeignet befunden; im Einzelfall mag sie im Laboratorium freilich gute Dienste leisten.

§ 10. Was die zweite Forderung betrifft, so hat die Erfahrung gezeigt, daß als Grenztemperatur 80° ohne Nachteile zulässig ist¹⁾, also eine Erhöhung von $80^{\circ} - 18^{\circ} = 62^{\circ}$, entsprechend einer Widerstandszunahme von 25%. Es wird nur, infolge der Ausdehnung, der Isolationswiderstand — im kalten Zustande von der Ordnung eines Megohm — herabgesetzt. Jedem Stromwert entspricht nun bei gegebenen Kühlungsverhältnissen eine asymptotische, stationäre Endtemperatur, welche nach einer halben Stunde merklich erreicht ist. Ferner bedingt jedes verbrauchte Kilowatt eine Stromstärke von 0,24 Kcal pro Sekunde oder 14,4 Kcal pro Minute. Soll das Leitungswasser sich um nicht mehr als etwa 4° erwärmen, so bedeutet das also einen Wasserbedarf von etwa 3,5 l pro Minute für jedes Kilowatt. Die Leitung des Wassers erfolgt einfach und billig durch passend gestaltete, nahtlose Flachrohre aus Kupfer, welche auf mindestens 10 Atm. geprüft sind und zwischen die Wickelung ohne Körperschluß derart eingebettet werden, daß kein Teil der letzteren um mehr als 20—30 mm von einer Wasserader entfernt liegt.²⁾ Die herausragenden Schlauchtüllen sind nach unten geneigt und mit Schutzscheibchen versehen, um etwaiges Durchsickern des Leitungswassers, sowie des bei feuchter Witterung darauf kondensierenden atmosphärischen Wasserdampfes in die Wickelung zu verhindern, was bedenkliche Folgen zeitigen könnte.

§ 11. Da die Schenkelwindungen nach dem Vorhergehenden (§ 4) eine untergeordnete Rolle spielen, bzw. mehr als Reserve für besondere Erregungsarten dienen, werden diese nicht gekühlt, sondern erhalten dafür entweder doppelten Drahtquerschnitt, oder werden parallel geschaltet; infolgedessen

1) Sogar 85° bis 95° bei ruhender Wickelung mit Baumwollisolation; nach den Normalien für Bewertung elektrischer Maschinen des Verb. D. Elektrotechniker, Elektrot. Ztschr. 34. p. 1040. 1918.

2) Mittels einer großen Staubsaugeinrichtung wurde die Wickelung eines Versuchsholms durch eingebettete perforierte Flachrohre durchlüftet. Diese Methode ergab eine ziemlich befriedigende Kühlung, welche sich wohl noch verbessern ließe. Indessen ist bei stationären Einrichtungen im allgemeinen Wasserkühlung vorzuziehen; insbesondere bei Elektromagneten wirkt sie entschieden besser. Auch ist in allen Laboratoriumsräumen Wasserleitung voranzusetzen, während kräftige Exhaustoren weniger allgemein zur Verfügung stehen.

ist dort allerdings nur die halbe Amperewindungszahl verfügbar. Bei alledem ist von der Abkühlung durch Konvektion und Strahlung noch ganz abgesehen; um diese zu erleichtern, könnten die äußeren Metallflanschen mit den bekannten Radialtorrippen versehen werden.

Der Wickelungsraum wird am besten durch einen Lochblechmantel umhüllt, indem die Wickeltechnik es nunmehr ermöglicht, ihm eine regelmäßige Außenform zu verleihen. Er zerfällt naturgemäß in zwei Abteile, die überwiegenden Polwindungen und die Schenkelwindungen enthaltend; sie sind mit besonderen Klemmen versehen. Es können außerdem noch zwei Sonderspulen auf die Polschuhe gestülpt werden, sofern dies mit Bezug auf die jeweilige räumliche Versuchsanordnung tunlich erscheint. Zur „Übersättigung“ der Polspitzen tragen sie wesentlich bei, wie weiter unten klargelegt wird, und ihre rein „eisenlose“ Wirkung superponiert sich dem Felde.

Bei gegebenem Wickelungsraum kann sich die Art der Bewickelung der zu benutzenden Stromquelle anpassen; die Erfahrung mit den verschiedensten Magnettypen führt zur empirischen Regel, daß dabei durchschnittlich jedes Quadratmillimeter freien Windungsquerschnitts fast zwei verfügbare Amperewindungen liefern kann. Für das große Modell wird die Wickelung derart bemessen, daß jeder Holm bei 80° nicht mehr als 70 Volt normale Betriebsspannung beansprucht, bei 27,5 Ampere Betriebsstrom. Dann können bei 110 Volt Netzspannung die beiden Holme neben-, bzw. bei 220 Volt hintereinandergeschaltet werden, auch wenn jene normale Stromstärke für kürzere Zeit mit 50 Proz. überschritten wird, entsprechend einem 2,25-fachen Wattverbrauch. Da das schwerste Modell seltener fabriziert wird, muß sich dessen Bewickelung nach den jeweiligen Umständen richten.

§ 12. *Mittleres und kleines Modell.* Ersteres ist dazu bestimmt, an die Stelle der bisherigen Halbringtype für Laboratorien zu treten. Gewicht und Wattverbrauch betragen etwas über die Hälfte der Werte beim großen Modell, und zwar wiegt die Grundplatte bzw. je ein Holm rund 65 kg. Die Konstruktion ist in mancher Beziehung vereinfacht, so sind z. B. Kugellager und Verschiebungsschraube im allgemeinen nicht vorgesehen; sie können aber angebracht werden, ebenso

wie eine innere Kernspülung. Wenn auch die erreichbaren Feldwerte nicht ganz so hoch sind, dürfte dieses Modell doch für manche Arbeiten bereits genügen. Bei der üblichen Wickelung ist für jeden Holm bei 80° eine Betriebsspannung von 55, für beide also 110 Volt, ein Betriebsstrom von 19 Ampere vorgesehen.

Schließlich wurde auch die bisherige kleine Type nach neueren Erfahrungen im einzelnen durchkonstruiert; dieses einfachste Modell ist den obigen ganz ähnlich und eignet sich hauptsächlich für Demonstrations- und Schulzwecke. Die konischen gewulsteten Polspitzen sind hier fest angegossen. Dieser leichte Apparat läßt sich mittels Bolzen oder Klammern in jeder Lage an Mauern, Balken, Konsolen usw. befestigen. Wasserspülung ist im allgemeinen nicht vorgesehen, läßt sich aber ebenfalls anbringen. Die Wickelung wird für gewöhnlich für jeden Holm bei 80° auf 45 Volt und etwa 7,5 Ampere bemessen, so daß man bei Parallelschaltung mit 24 Akkumulatoren auskommt und auch bei geringerer Spannung im Notfall einen ziemlichen Sättigungsgrad zu erreichen vermag.

§ 13. Die Sollwerte der wesentlichen Bestimmungsstücke der vier Modelle sind ungefähr wie in Tab. 2 normiert. Metrische Achsenhöhen empfehlen sich zum raschen Aufbau von Versuchen. Wie schon bemerkt, kann der Betriebsstrom für einige Zeit mit 50 Proz. überschritten werden. Die Feldwerte gelten für den normalen Luftschlitz (6×1 mm) bzw. auch für ($3 \times 0,5$) mm, innerhalb deren das Feld merklich gleichförmig ist. Die eingeklammerten Zahlen wurden bei Benutzung von zwei Sonderpolspulen mit zusammen 1000 Windungen (2,2 Ohm bei 80°) erhalten; nähere Angaben werden im letzten Abschnitt mitgeteilt. Die mit * versehenen Werte beziehen sich auf Ferrokobaltarmaturen. Die Feldwerte für das schwerste Modell sind durch Addition von 5 Kgs zu denen der großen Type geschätzt. Tatsächlich entspricht theoretisch der hinzukommenden peripherischen Kegelzone zwischen 93 und 200 mm Durchmesser

$$\delta \mathfrak{S} = 4\pi \mathfrak{J} \sin^2 \alpha \cos \alpha \log \frac{200}{93} = 6200 \text{ Gauss.}$$

Tabelle 2.

Bestimmungstück	Schwerstes Modell 432	Großes Modell 433	Mittleres Modell 434	Kleines Modell 435	Einheit
Gesamtgewicht, ungefähr	1400	360	200	50	kg
Achsenhöhe über Unterlage	550	450	350	250	mm
Basisdurchmesser der Polspitzen	43	43	43	40	mm
Basisdurchmesser der Polschuhe	200	93	80	—	mm
Lichtweg im Einzelholm	250	150	130	100	mm
Drahtdurchmesser, blank	—	3	2,5	1,6	mm
Gesamtwindungszahl . .	—	2 × 1275	2 × 1175	2 × 1450	—
Betriebsstrom	—	27,5	19	7,5	Amp.
Gesamte Kiloamperewindungen rund	130 (180)	70 (100)	45 (75)	22	KAW.
Gesamtwiderstand (18°) „	—	4,1	4,6	9,6	Ohm
Gesamtwiderstand (80°) „	—	5,1	5,7	12,0	Ohm
Betriebsspannung (80°) „	—	2 × 70	2 × 55	2 × 45	Volt
Elektrische Betriebsleistung (80°) . . . „	13 (16)	3,9 (6)	2,1 (4)	0,7	Kwatt
Ges. Stromwärme (80°) „	190	55	30	10	Kcal/Min.
Wasserverbrauch (3 Atm. Wasserdruck) „	—	15	10	—	Lit. / Min.
Maximalfeld f. 6 × 1 mm Schlitz „	(55)	45 (50)	43 (47)	35	Kgauss
Maximalfeld für 3 × 0,5 mm Schlitz „	(65*)	55* (60*)	47 (52)	40	Kgauss

§ 14. Die *Polschuhe* aus bestem, langsam geglühtem, schwedischem Walzeisen werden mittels kurzer Gewindezapfen in die Holme eingeschraubt. Im allgemeinen sind vorgesehen: Flachpole, Scheibenpole, auch als Zwischenlage verwendbar; Tellerpole, kugelige bzw. zylindrische Schalenpole, Spitzpole, Kegelstutzschuhe verschiedener Form, welche zunächst den größten Stirnflächendurchmesser bis auf 43 mm reduzieren. Zwischen diesen beiden kleineren Kreisflächen wird nun die eigentliche Interpolarmatur eingesetzt.

In Fig. 8 § 28 ist die Anordnung für die stärksten Felder dargestellt mit Stirnflächen von 3 mm Durchmesser; die günstigste Form wurde unter Berücksichtigung der Armaturen-

theorie¹⁾ nochmals sorgfältig bestimmt, wobei Berechnung, Bearbeitung und Messung fortwährend ineinandergriffen. Die Optimumgestalt weicht nur wenig ab von den bisher innehaltenden mehr empirischen Formen. Dagegen stellen die gestrichelten Linien die erste Annäherung mit dem halben Kegelwinkel $54^{\circ} 44'$ dar. Es erwies sich auch jetzt wieder günstig, diesen Winkel von der Mitte nach der Peripherie hin etwas wachsen zu lassen (vgl. A § 45), etwa von 55° — 59° . Statt durch eine gebrochene Gerade kann dieser Übergang auch durch einen Kreisbogen von 4° und passendem Radius vermittelt werden (A § 17). Bei der Verwendung hochgesättigten kostspieligeren Materials, z. B. Ferrokobalt (Fe_2Co), läßt sich dieses vorteilhaft zentrisch einfügen, wie in Fig. 8 abgebildet.

In die konischen Bohrungen des Holms H , des Polschuhs P und der Polspitze Q passen entsprechende massive Füllkerne K , welche auch zur Innenspülung eingerichtet werden können. Bei geringem Polabstand empfiehlt es sich, die Stirnflächen um einen Bruchteil des Durchmessers hervortreten zu lassen, so daß sie flache Isthmusansätze bilden, wie ich sie bereits 1889 benutzt habe.²⁾ Das bietet in bezug auf Intensität und Gleichförmigkeit des Feldes große Vorzüge; die Berechnung aller Abmessungen ergibt sich aus den gegebenen Formeln (A §§ 6—8). Bei den meisten magnetooptischen Versuchen sind geschlitzte Eisenkerne zu empfehlen, weil die runden Bohrungen das Feld zu sehr verzerren und schwächen; darauf wurde übrigens bereits im Jahre 1899 hingewiesen (A § 35).

Eine größere Zahl von Polspitzen sowie Interpolaramaturen für die verschiedensten Zwecke wurden im Laufe der Zeit hergestellt.³⁾ So z. B. für die Isthmusmethode, wie sie im hiesigen Laboratorium zur Prüfung des Maxwellschen Zugkraftgesetzes benutzt wurde. Ferner für mikromagnetische

1) Die Armaturentheorie des vorstehenden Aufsatzes sei im folgenden als „A“ zitiert.

2) H. du Bois, Phil. Mag (5) 29. p. 299 (Fig. 3), 1890.

3) Der reduzierte Durchmesser von 43 mm erleichtert die Anfertigung in jeder Laboratoriumswerkstatt; und zwar aus schwedischem Walzeisen oder Ferrokobalt; die Spitzen sind genau zu zentrieren, die Stirnflächen parallel einzustellen, wozu kräftige Dreischraubenfutter benutzt werden.

Arbeiten, wobei das Mikroskop ein konisches Trichinenobjektiv trägt, welches in den Winkel zwischen den Polspitzen paßt.

§ 15. *Schrägsichtige Polarmatur.* Bei manchen magneto-optischen Erscheinungen — Faraday-, Kerr- und namentlich Zeeman-Effekt — ist die Beobachtung auch unter einem beliebigen Neigungswinkel ϑ zur Richtung des Feldes bzw. der Magnetisierung erforderlich. Im Bereiche $0^\circ < \vartheta < 45^\circ$ muß dann der Strahlengang durch das Polinnere geführt werden; und zwar sind die kleineren Winkel gerade die interessantesten.

Die Polspitzen Q_1 und Q_2 (Fig. 4) sind durch eine gefensterte, verschraubbare Metallfassung verbunden; ihre Rückseiten sind kugelig in Schalenpolschuhe P_1 und P_2 eingeschliffen. Die Bohrung B hat die Gestalt einer einseitig gelegenen, rechtwinkligen Pyramide, welche um den Strahlenkegel paßt.¹⁾ Aus Fig. 4 geht hervor, wie man den Winkel zwischen der Feldachse $x'x'$ und der Strahlenrichtung xx beliebig einstellen und am Teilkreise T ablesen kann.

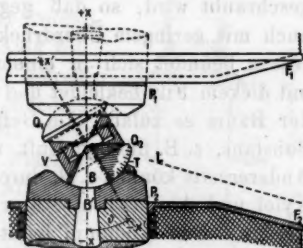


Fig. 4. $\frac{1}{8}$ nat. Gr.

Gradient-Polarmatur. Diese ist für Untersuchungen im ungleichförmigen Felde erforderlich. Das Versuchsobjekt kommt an eine Stelle in der Äquatorealebene, derart, daß sowohl H_x selbst wie auch der Quergradient $\partial H_x / \partial y$ und zugleich das Produkt $H_x \cdot \partial H_x / \partial y$ noch möglichst große Werte beibehalten; letzteres bestimmt bekanntlich die ausgeübte Anziehung bzw. Abstoßung. Außer dieser Hauptforderung muß auch einigen praktischen Bedingungen betreffs des nötigen Raumes u. dgl. genügt werden. Durch passende Einstellung der Holme auf der Grundplatte neigt man die Achsen der Armaturen gegeneinander um $20-30^\circ$; sie werden mit wenig abgerundeten Spitzen versehen.²⁾

1) Diese Vorrichtung wurde zu dem angegebenen Zwecke benutzt von G. J. Elias, Versl. Akad. Wet. Amsterdam 19. p. 402. 1910. Vgl. P. Zeeman, Researches in magneto-optics, p. 151. London 1913.

2) Vgl. P. Curie, Ann. de Chim. et de Phys. (7) 5. p. 289. 1895; K. Honda, Ann. der Phys. 32. p. 1028. 1910; M. Owen, Ann. d. Phys.

§ 16. *Thermomagnetische Polarmatur.* Eine solche Einrichtung wurde vielfach zwischen -200° und etwa $+500^{\circ}$ benutzt. Die beiden Polspitzen sind in einem oben trichterförmig erweiterten Gefäß befestigt und von den Polschuhen durch Hornringe oder Elfenbeinscheibchen isoliert, ebenso wie letztere von den Holmen; es ergibt dies erfahrungsgemäß eine gute Wärmeisolation ohne große Schwächung des Feldes. Das Gefäß ist mit Tubulatur für Thermometer u. dgl. versehen, ebenso wie mit einem Deckel, der unter Öldichtung aufgeschraubt wird, so daß gegebenenfalls mit Unterdruck und auch mit geringem Überdruck gearbeitet werden kann.¹⁾ Das Ganze befindet sich in einem zweiteiligen Holzkasten, außen mit dickem Filz bekleidet und mit Eierdaunen umgeben, soweit der Raum es zuläßt. Im Gefäß befindet sich die kryostatische Substanz, z. B. flüssige Luft, umgeben von Kohlensäureschnee. Andererseits können z. B. durch Dämpfe von siedendem Wasser, Xylol und Anilin Temperaturen von 100° , 139° , 183° erzeugt werden. Den Abdampf leitet man um das Gefäß herum.

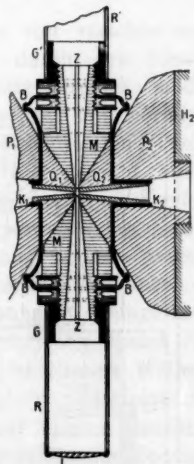
Kryo- und pyromagnetooptische Polarmatur. Für diese Zwecke, insbesondere zur Untersuchung des Zeeman-Effektes bis über 45 Kilogauss in flüssiger Luft²⁾ ist eine besondere Apparatur mit Polimmersion ausgebildet worden. Ein Zwischenstück *MM* (Fig. 5) wird mit den Polspitzen verlötet. Konische Querböhrungen durch dasselbe, sowie die

37. p. 659. 1912; Konzentrationsänderungen im ungleichförmigen Felde, wie sie nach W. Voigt, Gött. Nachr. 66. p. 8. 1910, C. Statescu beobachtete, bilden ein weiteres hierher gehöriges Versuchsobjekt.

1) Vgl. F. C. Blake, Ann. der Phys. 28. p. 449. 1909. Es wurde auch erreicht, die Isolation durch ein Vakuumglas zu bewirken, innerhalb dessen sich kleinere Polspitzen aus Fe_3Co befinden. Obwohl bei zentrierter, symmetrisch-labiler Einstellung die magnetischen Kräfte sich aufheben sollten, ist kein Glasgefäß imstande, ohne isolierende Zentrierfutter zu widerstehen; diese bedingen keine allzu große Beeinträchtigung der Vakuumisolation. Bei einer solchen „Vakuumarmatur“ ($5 \times 1 \text{ mm}$) für flüssigen Wasserstoff betrug das Feld 45 Kgs. Isoliert man mittels Hartporzellanrohr, so kann man mit Fe_3Co (Umwandlungspunkt 987°) auch zu recht hohen Temperaturen gelangen. Bei der Beobachtung von Funkenpektren im Felde empfiehlt sich elektrostatische Isolation mittels Glimmerscheiben.

2) H. du Bois u. G. J. Elias, Ann. d. Phys. 35. p. 618. 1911.

Längsschlitzte der Kerne K_1 und K_2 gestatten einem transversalen bzw. longitudinalen Strahlenkegel Durchgang; das Präparat wird zwischen die Stirnflächen zentrisch eingefasst. Ein Lederbalg BB umfaßt das Ganze, isoliert es von den Polschuhen P_1 und P_2 und dient als Behälter für flüssige Luft; die isolierten Kernstützen bei K_1 und K_2 sollen das Durchsickern in die Bohrung behindern. Die Rohrstücke R und R' sind mittels Galalithbuchsen G und G' aufgeschraubt und tragen abschließende Linsen L bzw. Glasplatten. Der Innenraum kann durch ungelöschten Kalk von Wasserdampf und Kohlensäure befreit werden, obwohl diese Dämpfe ohnedies bald ausfrieren. Die Dioptrik wird außen durch Heizspülchen oder Flämmchen — event. auch durch Alkoholberieselung — eisfrei gehalten und öfters abgewischt. Mit Hilfe einer ähnlichen sehr vereinfachten Vorrichtung wurde neuerdings der Kerr Effekt bei tiefen Temperaturen untersucht und andererseits bei Erhitzung bis 450° . Die Wärmeisolation erfolgte durch Asbest; gegen Vereisung in der Kälte sowie Oxydation und Anlauffarben bei Erhitzung wurde ein trockenes indifferentes Gas hindurchgeführt.

Fig. 5. $\frac{2}{3}$ nat. Gr.

§ 17. *Steighöhenarmatur.* Ein früher beschriebener Apparat¹⁾ wurde dem Halbring angepaßt. Mittels eines eigentümlich gestalteten Glasgefäßes können bei beliebiger Neigung von $0-70^\circ$ des Steigrohres Flüssigkeitskuppen im Felde beobachtet werden. Der ganze Apparat ist an einem Hohlzylinder montiert, der innen schwach konisch ausgeschliffen und um den Polschuh drehbar angeordnet ist. Zum Ablesen des Meniskus dient ein Zeissches eisenfreies Meßmikroskop, welches durch eine dem Steigrohr parallele Mikrometerschraube verschoben wird. Weitere Einzelheiten

1) H. du Bois, Wied. Ann. 35. p. 146. 1888.

sind l. c. beschrieben; es wurden damals (1888) bereits Polspitzen benutzt, deren Stirnfläche nicht kreisförmig, sondern rechteckig war, und deren Mantelflächen prismatisch in die Polschule übergingen, wobei der Winkel mit der Achse auch schon ein kleinerer war als der bei Kegelspitzen erforderliche.

Prismatische Polarmatur. Die weitere Entwicklung führte dann zur Konstruktion prismatischer „Rippenpole“, wie sie

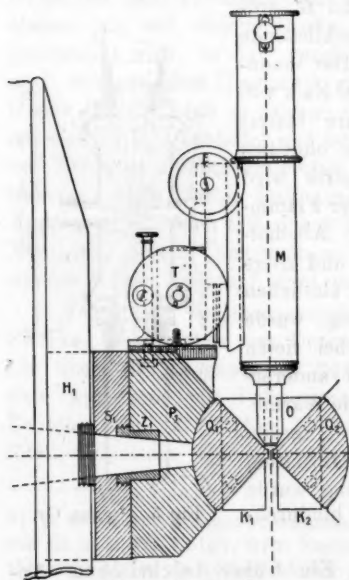


Fig. 6. $\frac{1}{3}$ nat. Gr.

Fig. 6 im Längsschnitt darstellt. Neben der wieder ein wenig vorstehenden „Stirnrippe“ setzen die Prismenflächen mit dem theoretisch günstigsten Neigungswinkel 45° an, der durch einen Kreisbogen von 5° schließlich bis 50° ansteigt. Ähnlich wie bei den Kugelschalen der Fig. 4 passen hier die Polspitzen Q_1 und Q_2 auf die Polschuhe P_1 und P_2 mittels zylindrischer Schiffe und können auch hier durch Leder thermisch von ihnen isoliert werden. Ferner tragen sie an ihren Enden kräftige Metallklötze K_1 , K_2 ; durch Keile oder Schrauben kann der Pol-

abstand fest eingestellt werden; die ganze innere Armatur ist nun um die Querachse drehbar gegen die Polschuhe. Diese sind ihrerseits um Zapfen Z , also um die Längsachse drehbar; sie vermitteln den Übergang vom rechteckigen Prismenquerschnitt zum runden Holmprofil, indem doch letzteres im allgemeinen vorzuziehen ist. M ist das Meßmikroskop mit Teilkreistrommel T , dessen Objektiv O mittels der Einstellschraube E bis nahe an die Stirnrippen gerückt werden kann.

In der Querrichtung — senkrecht zur Bildebene — sind

Q_1 und Q_2 genügend lang, derart, daß sich u. a. auch Saitengalvanometer ihnen anpassen lassen, deren Anwendung in Physiologie, Klinik und Technik immer weitere Kreise zieht. Insbesondere ist diese Polarmatur zur Aufnahme des Edelmannschen „Fadenträgers“ oder des Martens-Huthschen „Saiteneinsatzes“ geeignet. Selbstverständlich muß die Längsbohrung dann zur Aufnahme der zugehörigen Dioptrik eingerichtet werden, wobei der kurze Strahlengang sich wieder bewährt.¹⁾

§ 18. Die Beziehungen zwischen den vier verschiedenen Modellen werden vor allem beherrscht durch den hierfür maßgebenden Kelvinschen Ähnlichkeitssatz; freilich mußte jedes für sich besonders entworfen, berechnet und normiert werden. Von einer weiteren Vergrößerung des schwersten Modells wird im allgemeinen abgesehen. Das Eisengewicht steigt wie die dritte Potenz der Linearabmessung, das nötige Kupfergewicht fast wie deren Quadrat, die Abmessungen des Feldes — bei gegebenem Wert desselben — nur einfach proportional; dagegen der Feldwert — bei gegebenen Abmessungen — höchstens logarithmisch. Aus diesen Gründen gelangt man schließlich zu unvorteilhaften Verhältnissen. Der Kunst des Experimentators darf ja auch manches überlassen bleiben, und zwar hat diese sich hier in möglichster Verkleinerung der Versuchsobjekte zu betätigen, worin mit einigem Geschick viel erreicht werden kann. Sollte aber trotzdem für Spezialzwecke des ausgedehnteren Interferrums wegen ein noch größeres Modell erforderlich werden, so wären dessen Entwurf und Normierung an Hand der vorliegenden Erfahrungen ein leichtes. Diese längst bekannten Gesichtspunkte seien nochmals betont, weil man auf diesem Gebiete zuweilen noch unrichtigen Anschauungen begegnet.

III. Messungen an neuen Halbringmagneten.

§ 19. Ältere systematische Beobachtungsreihen über Elektromagnete des Rühmkorffschen Typus verdankt man

1) Vgl. W. Einthoven, Arch. f. d. ges. Physiol. 130. p. 287. 1909; Ann. d. Phys. 12. p. 1063. 1903; 14. p. 182. 1904; 16. p. 20. 1905; 21. p. 483 u. 665. 1906; F. F. Martens, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 13. p. 1061. 1911.

u. a. den Herren Quincke, Leduc, Stenger, Czermak und Hausmaninger; wie Hr. Walter bemerkte, fanden letztere für nahe Kegelarmaturen eine befriedigende Übereinstimmung mit der Stefanschen Theorie, dagegen blieben für entferntere nicht ganz gesättigte Flachpole die Feldwerte bedeutend hinter den errechneten zurück. Neuerdings veröffentlichte Hr. Siegbahn ausführliche Messungen an ungesättigten Armaturen. Das Feld des ebenfalls von Hrn. Quincke, l. c., p. 359. Fig. 5 beschriebenen sog. „Berliner Elektromagnets“ mit der veralteten Anordnung paralleler Holme wurde eingehender von Hrn. Max Weber untersucht.¹⁾

Meiner ersten Beschreibung eines Ringmagnets fügte ich l. c., p. 545, einige Messungen des Maximalfeldes zwischen etwas mangelhaft zentrierten spitzen Polschuhen (III) bei, die indessen nur einen ungefähren Überblick bezweckten. Sie erfolgten mittels $\frac{1}{4}$ -konzentrierter Manganchlorürlösung in einem Steigrohr von 2,2 mm äußerem, 1,8 mm innerem Durchmesser. Das ziemlich ungleichförmige Feld dürfte den Meniskus merklich deformiert haben; überhaupt genügten jene Bestimmungen genaueren Anforderungen vom heutigen Standpunkte kaum. Wenn daher Hr. Walter l. c. daraus eine Bestätigung der Stefanschen Formel herleitete, so glaube ich das doch mehr als Zufall betrachten zu sollen. Ferner habe ich mit Wismutspiralen Bestimmungen am ersten Halbringelektromagnet durchgeführt²⁾, dessen Höchstfeld bei (6×1) mm Schlitz 36,7 Kilogauss betrug, in späteren Exemplaren 38 bis zu 40 Kilogauss. Im Laufe der Zeit sind dann im hiesigen Laboratorium und in demjenigen der Firma Hartmann & Braun eine Menge verschiedenartiger, jetzt freilich ziemlich überholter Messungen am früheren Modell angestellt.

§ 20. Die nachstehenden Feldbestimmungen wurden halbtisch mittels Drehspul- bzw. auch Kugelpanzergalvanometer

1) G. Quincke, Wied. Ann. 24. p. 348. 1885. A. Leduc, Journ. de Phys. (2) 6. p. 238. 1887. F. Stenger, Wied. Ann. 35. p. 333. 1888. P. Czermak u. V. Hausmaninger, Wien. Ber. 98. (2) p. 1152. 1889. M. Weber, Elektrot. Zeitschr. 15. p. 598. 1894. B. Walter, Ann. d. Phys. 14. p. 106. 1904. M. Siegbahn, Lunds Univ. Årsskr. N. F. (2) 7. p. 24. 1911.

2) H. du Bois, Wied. Ann. 51. p. 545. 1894; Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 362. 1899.

ausgeführt, welches mit einem Normalsolenoid geeicht und dauernd kontrolliert wurde. Zur Verwendung gelangte eine Anzahl Probespulen, teilweise aus dünnstem Draht bzw. Band unter der Lupe hergestellt, die in Tab. 3 zusammengestellt sind.

Tabelle 3.

Signatur	Beschreibung	Durchmesser mm	Dicke mm	Drahtdicke blank mm	Windungs- zahl	Windungs- fläche qcm	Widerstand	
							netto Ω	brutt. Ω
A	Glasnormale I	13,95	—	$0,011 \times 0,20$	1	1,580	1,09	1,27
J	Meßspule	4	0,35	0,08	ca. 40	3,1 ^o	1,50	1,70
K	Meßspule	2,6	0,47	0,035	48	1,27	3,17	3,65
L	Marmorscheibe	12,78	1,2	0,21	5	6,41	0,09	0,59
M	sphäroidisch	8	2,4	0,025	250	7,28	44,8	44,9
P	Meßspule	3	1,5	0,035	155	6,17	11,7	12,4
Q	Glasnormale II	14,541	—	$0,011 \times 0,20$	1	1,661	1,96	2,21
R	tangent. Spule	$3,4 \times 1,3$	1,2	0,035	70	1,21	4,88	5,45

Die Normalspulen A und Q trugen um Glasscheiben gespannte Phosphorbronzebänder; auf sie wurden die übrigen Windungsflächen bezogen. Außer M diente eine winzige Spule (N, $1,3 \times 0,3$ mm, 0,51 qcm Windungsfläche) zu topographischen Bestimmungen. Meßspule (K) wurde bei Stirnflächen von 3 mm verwendet. R war für Messungen der tangentialen Feldkomponente besonders angeordnet. Nachträglich wurde durch Anschluß an die Feldnormalien der P.-T. Reichsanstalt eine Kontrolle geübt, welche befriedigende Übereinstimmung ergab.¹⁾

Es wurden Polarmaturen mit Stirnflächen von 3, 3,6, 6, 12, 43, 85 und 160 mm Durchmesser in Abständen von 0,5–20 mm benutzt. Der Kürze halber ist das Feld nicht als Funktion der Erregung, sondern nur für ihren Höchstwert angeführt. Alle Feldwerte sind in Kilogauss ausgedrückt; diejenigen in eckigen [] wurden bei Benutzung der Sonderpolspulen erhalten; ihre Nutzwirkung geht aus den Angaben zur Genüge hervor; in Fällen, wo das Feld etwas ungleichförmig war, mißt die Probespule einen Mittelwert. Da es sich hier nur um Apparatkonstanten handelt, genügte eine Genauigkeit von etwa 1 Proz.

1) Vgl. W.J. de Haas u. P. Drapier, Ann. d. Phys. 42. p. 673. 1913.

§ 21. *Großes Modell.* Zunächst wurden besondere Versuche, wie die in § 3 beschriebenen, angestellt, um die Rolle der Schenkelwindungen klarzustellen. Wird das Feld nach Art der Fig. 1 als Funktion der KAW. betrachtet, so ist die Lage der Erregung wieder bis zu etwa $\frac{2}{3}$ Sättigung gleichgültig. Darüber hinaus gewinnen die Polwindungen einen immer größeren Einfluß. Bei nahen Kegelpolen tragen die Schenkelwindungen kaum mehr als 1 Proz. zum Felde bei; dagegen erhält man bei Tellerpolen im Abstände von 150 mm einen erheblichen Feldzuwachs, wenn man die Schenkelspulen hinzuschaltet; dabei erweist sich ihr Nutzen (vgl. § 4).

Tab. 4 enthält Messungen des Höchstfeldes bei um ca. 50 Proz. gesteigertem Betriebsstrom; diese Steigerung bedingt einen Zuwachs, wovon das Spulenfeld $\frac{3}{4}$ liefert (vgl. A, § 45). Die Werte * sub FC beziehen sich auf einen großen Elektromagnet Nr. 109 (1913) mit Kegelpolspitzen von 3 mm Stirnfläche.

Tabelle 4.

Großes Modell, Nr. 109 und 77.

Polabstand in mm	Kegelstutz-Polschuhe VII, $\frac{93}{43}$ mm					Flachpole I 85 mm
	Polspitzen					
	FC $\frac{43}{3}$ mm	VI $\frac{43}{3,6}$ mm	VII $\frac{43}{6}$ mm	VIII $\frac{43}{12}$ mm	43 mm	
0,5	55,2* [59,0*]	49,7 [55,3]	47,3 [51,9]	41,8 [45,8]	—	—
1,0	51,2* [55,2*]	46,4 [51,8]	45,4 [50]	40,7 [44,3]	29,6	23,5
1,5	47,7* [51,9*]	43,8 [49,6]	43,7 [48,1]	39,3 [42,6]	29,0	23,4
2,0	44,7* [49,1*]	41,2 [47,3]	41,6 [46,1]	37,9 [41,1]	28,4	23,2
5,0	—	—	33,2 [37,5]	32,3 [36,4]	26,7	21,3
10	—	—	24,7 [30,0]	25,0 [28,9]	23,4	18,0
15	—	—	—	20,4 [24,0]	19,8	15,7
20	—	—	—	—	16,7	13,8

Diese wogen je nur 55 g und waren aus einer Versuchsschmelze 32prozentigen Ferrokobalts (Dichte 7,97) hergestellt. Sie erwiesen sich schmiedeeisernen Spitzen cet. par. bis 7 Proz. überlegen, so daß mit einem Einsatz wie Fig. 8 dann 8 bis 9 Proz. Zuwachs zu erzielen war.¹⁾ Was den Vergleich mit

1) P. Weiss, Journ. de Phys. (4) 6. p. 365. 1907; Compt. rend. 156. p. 1970. 1913, hat zuletzt mit 22 Kilowatt für (8 × 1) mm und

der Theorie betrifft, so ist dieser in aller Schärfe nicht gut durchführbar, u. a. weil das reine, eisenlose Spulenfeld beträchtlich ist und nicht direkt meßbar bzw. genau berechenbar.

§ 22. Immerhin läßt sich zeigen, daß es bei der höchsten Erregung auf 4 Kilogauss zu schätzen ist, wobei die Sonderpolspulen einbegriffen sind. An und für sich lieferten diese in der gewöhnlichen Lage 52,5 Gauss pro Ampere, während in Gaugain-Helmholtzscher Anordnung diese Spulenkonstante 37,5 betrug; für die festen Polspulen 30.

Die auf Grund der Armaturetheorie oben berechneten Zahlenwerte (A , § 45, unter Annahme der hier vorliegenden Abmessungen $2a = 0,05$ cm, $2B = 9$ cm, $2b = 0,36$ cm, $\alpha = 54^\circ 44'$) zeigen, daß in zweiter Annäherung genügende Übereinstimmung herrschen würde, wenn A , die Entfernung des Konvergenzpunktes, noch etwas geringer als 3 cm angenommen würde. Denn für $2a = 0,05$ cm gibt Tab. 4 ein Feld von [55,3] Kilogauss, also nach Abzug des Spulenfeldes 51,3 Kilogauss, während dort 50,2 Kilogauss berechnet wurde.

Bei einfachen gesättigten Flachpolen muß das Gesamtfeld aus Stetigkeitsgründen bei abnehmendem Polabstand konvergieren gegen den maximalen Induktionswert

$$\mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{J} + \mathfrak{H}_s = 21500 + \mathfrak{H}_s,$$

wo \mathfrak{H}_s das eingeprägte Spulenfeld bedeutet. Das wird auch durch die Erfahrung bestätigt; dagegen ist die angenähert lineare Abnahme bei wachsendem Polabstand stets größer, zuweilen über das Doppelte, als aus der Gleichung

$$\mathfrak{H}_1(0) = 4\pi \mathfrak{J} \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a^3}{2b^3} - \dots \right)$$

folgen würde (vgl. A , § 14). Es liegt nahe, dieses auch von Czermak und Hausmaninger gefundene Manko der divergierenden Ausbreitung der Magnetisierungslinien gegen die Stirnflächen zuzuschreiben, wobei sogar hinter dem positiven Nordpole negative Senken, beim Südpole Quellen auftreten können, welche das Feld verringern (vgl. Fig. 9, § 30).

(3 × 2) mm 52,6 bzw. 47,6 Kilogauss gefunden, was nach Reduktion auf 3,6 mm Stirnfläche den Werten in Tab. 4 wesentlich gleich kommt, trotz des 4fachen Gewichts und doppelten KW-Verbrauch. Ein Ferrokalbaleinsatz wie von mir, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 301. 1913, vorgeschlagen (vgl. Fig. 8) erhöhte die Feldwerte um 5 Proz. auf 55,2 bzw. 49,9 Kilogauss, also etwa wie Tab. 4, Spalte 2.

§ 23. In Tab. 5 sind einige Feldmessungen an der schrägsichtigen Polarmatur (§ 15) angeführt, einerseits im massiven, ungebohrten Zustand, dann auch nach Durchstich der Ausbohrung; der Durchmesser der Stirnfläche betrug dabei 6 mm. Indem der Neigungswinkel von $0-25^{\circ}$ wächst, verringert sich das Feld etwa um 3, zwischen 0° und 45° um 7 Kgs. Bei massiven Polspitzen bleibt es normal zu den Stirnflächen, wie nach bekannten Eigenschaften der Induktionslinien nicht anders zu erwarten. Nach der Durchbohrung ist das Feld schwächer und etwas deformiert, so daß ϑ einige Grad größer erscheint als der Winkel zwischen $x'x'$ und xx (Fig. 4); die Differenz wird geringer, wenn ϑ wächst, und schwindet bei 45° ; der zurückrichtende Einfluß der Polwindungen kompensiert dann gerade die Ablenkung durch die Ausbohrungen. Übrigens ließe sich sowohl die Schwächung wie die Deformation wohl verringern durch einen Satz Teilkern von gestreckter Pyramidenform.

Tabelle 5.

Großes Modell, Nr. 77. Schrägsichtige Polarmatur VIII/XIII.

Winkel ϑ	Polabstände							
	1 mm		2 mm		4 mm		6 mm	
	massiv	Bohrung	massiv	Bohrung	massiv	Bohrung	massiv	Bohrung
0°	44,4	27,9	41,2	29,2	35,3	28,7	31,3	26,4
15°	—	—	—	—	—	27,3	—	—
25°	—	25,5	—	26,2	—	25,6	—	23,9
35°	—	—	—	—	—	23,8	—	—
45°	37,3	20,1	33,9	21,6	28,2	21,2	24,0	19,5

§ 24. Mit Prismenarmaturen ließen sich Feldwerte erzeugen, die den mit Kegelpolen erhaltenen nicht allzusehr nachstanden. Mit Rippenpolen nach Fig. 6 ($2b = 3,6$ mm, $2c = 84$ mm, $\alpha = 45-50^{\circ}$) wurden die Werte der Tab. 6 gemessen. Der mittlere Winkel $\alpha = 47,5^{\circ}$ ist der theoretisch günstigste für $2c = 84$ mm (A § 28).

Ein Vergleich mit der Theorie in zweiter Annäherung ist hier noch weniger scharf als bei den Kegelpolen wegen des allmählichen Überganges der Prismengestalt in den runden Holmquerschnitt. Indessen entspricht doch der Wert [46,0], d. h. nach Abzug des Spulenfeldes 42 Kgs, laut Rechnung (A § 46)

etwa $\Delta = 6$ cm, also ungefähr dem doppelten des Konvergenzpunktabstandes bei Kegelarmaturen. Wie zu erwarten, scheint also die Konvergenz bei letzteren eine stärkere zu sein.

Tabelle 6.

Großes Modell, Nr. 77. Prismatische Polarmatur XIV/XIV.

Polabstände $2a$	Winkel		
	$\vartheta = 0^\circ$	$\vartheta = 25^\circ$	$\vartheta = 45^\circ$
0,5 mm	[46,0]	—	—
1,0 "	[42,3]	—	—
1,5 "	[40,4]	—	—
2,0 "	35,3 [38,8]	33,5	30,4

§ 25. *Mittleres und kleines Modell.* Ersteres liefert nach Tab. 7 erhebliche Feldwerte bei den kleineren Polabständen,

Tabelle 7.

Mittleres Modell, Nr. 85.

Pol- abstand	Kegelstutz-Polschuhe X, $\frac{80}{43}$ mm				Flach- pole I	Teller- pole II
	Polspitzen			43 mm		
	VI $\frac{43}{3,6}$ mm	VII $\frac{43}{6}$ mm	VIII $\frac{43}{12}$ mm			
					85 mm	160 mm
0,5 mm	(46) 47,2 [51,9]	45,2 [48,4]	39,8 [43,9]	—	—	—
1,0 „	(42,5) 43,8 [48,2]	43,4 [47,2]	38,9 [43,2]	28,7	21,5	—
1,5 „	(39) 41,1 [45,5]	41,7 [45,2]	37,5 [42,1]	28,2	21,2	—
2,0 „	38,9 [43,3]	39,3 [43,2]	36,8 [41,4]	27,8	(21,2) 20,9	—
3,0 „	—	31,5 [36,1]	30,3 [35,5]	25,7	(17,6) 17,7	(7,2) 6,9
10 „	—	—	23,7 [29,3]	22,0	(13,7) 14,4	(6,3) 6,2
15 „	—	—	18,5 [24,5]	18,1	— 12,1	— 5,7
20 „	—	—	—	15,0	(9,9) 10,8	(5,4) 5,2

während es bei ausgedehnterem Interferrum weiter hinter der großen Type zurücksteht, in Übereinstimmung mit der Theorie. Hier sind in runden () Klammern Höchstwerte eingesetzt, die ein alter Vollringmagnet mit den gleichen Polarmaturen ergibt.

Schließlich enthält Tab. 8 Messungen am kleinen Modell, welches auch recht befriedigende Resultate zeigt, namentlich bei engem Luftschlitz.

Tabelle 8.

Kleines Modell, Nr. 88.

Polabstand	Stirnfläche $\frac{43}{3,6}$ mm	Stirnfläche $\frac{43}{6}$ mm
0,5 mm	40,4	37,4
1,0 „	36,6	34,8
1,5 „	34,0	32,8
2,0 „	31,1	30,7
5,0 „	20,6	21,8

§ 26. *Gleichförmigkeitsgrad.* Hierüber wurden viele spezielle Erfahrungen gesammelt, von denen einige mehr allgemeingültige mitgeteilt seien. Bei parallelen, nicht allzu entfernten Flachpolschuhen ohne Bohrung ist das Feld im äquatorealen Umkreise von $\frac{2}{3}$ des Durchmessers merklich gleichförmig, und dementsprechend auch auf der axialen Luftstrecke; bei sich ausbreitenden Tellerpolen gilt ähnliches, freilich ist das Feld dann bedeutend schwächer. Bei ziemlich gesättigten Flachpolen (I, $2a = 3$ mm, $2b = 85$ mm, $\mathfrak{H}_e =$ ca. 850 Gauss, $\mu =$ ca. 25) wurde bei Parallelstellung einmal ein Feld von 22 Kgs gemessen. Bei einer Neigung um $2\epsilon = 1^\circ 26'$ blieb es bei gleichem Abstand in der Mitte ungeändert; der äquatoriale Gradient betrug jetzt 250 Gauss pro cm, während durch die Abnahme des Feldes mit dem Abstand nur etwa 170 Gauss pro cm bedingt wären. Im weniger gesättigten Zustand ($\mathfrak{H}_e =$ ca. 250 Gauss, $\mu =$ ca. 50) erwies sich der Gradient relativ noch größer. Es scheinen demnach die Induktionslinien nach der engeren Seite konvergierend hingedrungen zu werden, nach der weiteren sich dagegen etwas divergierend auszubreiten, wie es auch die Strömungsdiagramme bestätigen (§ 30). Genau parallele Justierung ist daher unter allen Umständen Vorbedingung für die Gleichförmigkeit.

Dies gilt ebenso für die Stirnebenen der Polspitzen; hieran wurden für besondere Zwecke vielerlei Messungen ausgeführt, zuletzt mit der kleinsten topographischen Probespule (N). So ergab sich bei drehrunden Schuhen (IV) und Spitzen (III) ohne Vorsprung, vom Halbwinkel $\alpha = 63^\circ 26'$, $2b = 6$ mm, Gleichförmigkeit für einen Polabstand $2a = 3$ mm; hier war also

$\beta = \arctg b/a = \arctg 2 = 63^{\circ} 26' = \alpha$, in Übereinstimmung mit der Theorie (A § 8, Tab. 1).

Bei Kegelpolschuhen (VII) und Spitzen (VII) vom Halbwinkel $\alpha = 54^{\circ} 44'$ (nach der Peripherie etwas zunehmend) und vortretender Stirnfläche ($2b = 6$ mm) war das Feld gleichförmig bei einem Polabstand von ungefähr $2a = 1$ mm, also $\tg \beta = 6$; das stimmt mit dem theoretischen Werte $\tg \beta = 5,361$ (A Tab. 1) ebenfalls genügend überein.

Ferner geben konzentrische Kegelpolschuhe (VI) vom Halbwinkel $\alpha = 39^{\circ} 14'$ mit Stirnflächen ein ausgeprägtes Quervermaximum, während sie innerhalb eines Isthmus theoretisch ein gleichförmiges Feld erzeugen würden.

§ 27. Die allgemeine theoretische Regel (A § 8), wonach ein Quervermaximum sich bei Annäherung der Armaturen abflacht und einem Querminimum zustrebt, wurde in allen erprobten Fällen richtig befunden. Auch manche in der Literatur zerstreute Angaben stimmen damit überein.¹⁾

Viele Erfahrungen und Messungen mit Bohrungen der verschiedensten Profile bestätigen auch das rechnerische Ergebnis (A § 35), daß Schlitzbohrungen die Gleichförmigkeit viel weniger beeinträchtigen als runde Bohrungen, wenn auch infolge „innerer Streuung“ ihrer Ränder letztere nicht ganz so störend wirken als die Rechnung ergibt.²⁾

Bei der in Tab. 6 angeführten Prismenpolarmatur XIV/XIV ($2c = 84$ mm) war das Feld über die mittleren 50 mm merklich gleichförmig; es fiel dann beiderseitig ab und zeigte an den Rippenenden nahezu Halbwerte.

Bei der Gradientarmatur (VII/VI) wurde das Feld mittels des nahezu kugeligen Probespulchens *M* (Tab. 3) topographisch durchgemessen. Im allgemeinen liegt innerhalb des kleineren stumpfen Achsenwinkels (Richtung + *y* in Fig. 7) das Maxi-

1) Vgl. z. B. M. Siegbahn l. c. p. 41; P. Séve, Thèse A 703. p. 63, Paris 1912; Journ. de Phys. (5) 3. p. 12. 1913; A. Piccard, Arch. des sciences phys. et nat. (4) 35. p. 344. 1913.

2) O. M. Corbino, Phys. Zeitschr. 11. p. 521. 1910, photographierte die Verteilung der „Isodynamen“ im Interferrum mittels der transversalen Doppelbrechung in Bravais-Eisen und fand dabei erhebliche Deformationen durch eine runde Bohrung, welche unter Umständen paradoxe Zeeman-Effekte u. dgl. vortäuschen können.

num von $\mathfrak{S}_x \partial \mathfrak{S}_x / \partial y$ weiter und ist flacher und weniger hoch als in der entgegengesetzten $-y$ -Richtung. Bei zunehmendem Achsenwinkel entfernt es sich vom Achsenschnittpunkt A in der $+y$ Richtung; der Spitzenabstand und die Stromstärke beeinflussen seine Lage weniger. In Fig. 7 sind einige sich

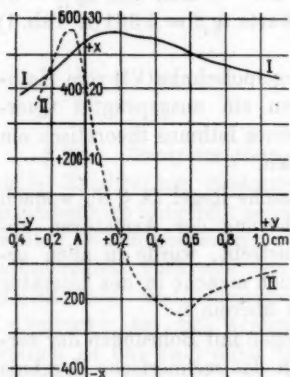


Fig. 7.

hierauf beziehende Kurven gezeichnet, die zu der § 15 beschriebenen Anordnung mit dem Achsenwinkel 25° passen.¹⁾ Die Abszissen $\pm y$ stellen die Entfernungen vom Achsenschnittpunkt dar; die Ordinaten der Kurve I bedeuten das Feld \mathfrak{S}_x in Kilogauss (rechte Ordinaten-skale), die von II den Wert $\mathfrak{S}_x \partial \mathfrak{S}_x / \partial y$ in Millionen CGS. (linke Skale). Hierbei betrug der Spitzenabstand 3 mm, die Erregung 50 KAW. Man hat also ein Feld von fast 30 Kilogauss mit sehr erheblichem Gradient.

§ 28. *Streuung.* Bei dem zumeist in Betracht kommenden Kegelarmaturenpaar (VII/VII) mit 2 mm Polabstand und Erregung mit 2×25 Amp. in den Polspulen des großen Modells war das Streufeld in der Äquatorealebene in ca. 1 m Entfernung dem Erdfelde gleich; auf größere Entfernungen muß es mit der reziproken dritten Potenz abnehmen. Bei stärkerer Erregung spielt das Streufeld der Polspulen eine große Rolle, welches demjenigen der Pole selbst entgegengesetzt ist und das Streubild kompliziert im Gegensatz zu der gleichmäßigen Bewickelung eines Vollringmagnets.

Was die Streuung in unmittelbarer Nähe von Kegelarmaturen betrifft, so habe ich früher zwei Annahmen gemacht; einmal seien die Feldlinien im Interferrum konzentrische Kreisbögen, die senkrecht aus dem Eisen austreten; zweitens verlaufen sie nach dem Kirchhoff-Stefanschen Ansatz parallel der Achse. Die beiden Postulate führen zu einer unteren bzw.

1) Abgebildet bei M. Owen, Ann. d. Phys. 37. p. 659. 1912.

oberen Grenze des magnetischen Widerstandes X , indem gezeigt wurde¹⁾, daß

$$\frac{-\sin \alpha \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi B} < X < \frac{\cot \alpha}{\pi B}.$$

Für einen mittleren Winkel $\alpha = 57^\circ$ wird

$$\frac{0,51}{\pi B} < X < \frac{0,65}{\pi B}.$$

Es wurde bei dem gleichen gesättigten Armaturenpaar an 12 Punkten mittels der Probespulen N und R (Tab. 3) die normale und tangentielle Feldkomponente beim Austritt aus dem Eisen bestimmt, woraus die Neigung δ des resultierenden Feldes zur Normalen und sein absoluter Wert sich ergeben.

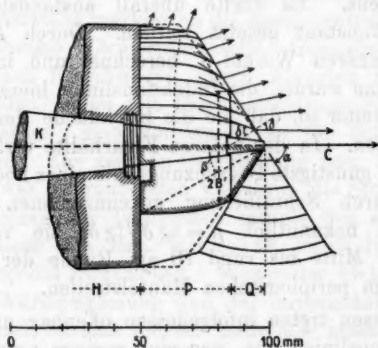


Fig. 8. $\frac{2}{3}$ nat. Gr.

Diese sind in der oberen Hälfte der Fig. 8 durch Pfeile dargestellt ($0,4 \text{ mm} = 1 \text{ Kgs}$); in der unteren sind tangierende Kreisbögen abgebildet, welche nicht mit den Kegelflächen konzentrisch sind; nahe der Achse verläuft das Feld ihr merklich parallel. Der wirkliche Zustand hält demnach ungefähr die Mitte zwischen den beiden oben erwähnten Annahmen, so daß auch der magnetische Widerstand einen Mittelwert aufweisen muß.

§ 29. Durch Feilichtbilder wurde dieses Verhalten qualitativ bestätigt. Bei der Aufnahme derartig intensiver Felder benutzt man besser schwach magnetisches Material, z. B. gekörnten

1) H. du Bois, Ann. d. Phys. 1. p. 202. 1900.

Magnetkies, oder man bettet passend gesiebtes Eisenfeilicht von vornherein in eine klebrige Lackschicht ein. Neben der Richtkraft des Feldes wirkt auch eine erhebliche translatorische Schubkraft, welche Fehler bedingen kann, so daß solche Feilichtbilder mit Vorsicht zu interpretieren sind. Bei remanenter oder schwacher induzierter Magnetisierung setzen die Teilchen normal am Eisen an, bei wachsender Erregung neigen sie sich der Achsenrichtung zu.

Ferner gestattet die Gleichung (A § 43, Gleichung (34))

$$\operatorname{tg} \delta' - \frac{4\pi \mathfrak{J}_m}{\mathfrak{H}_r} \sin \delta' = \operatorname{tg} \delta$$

Rückschlüsse betreffs des Verlaufes der Induktionslinien innerhalb des Eisens. Es durfte überall anstandslos $4\pi \mathfrak{J}_m = 21500$ CGS. konstant gesetzt werden. Durch Ausprobieren wurden die inneren Winkel δ' berechnet und in Fig. 8 eingezeichnet; dann wurden die Induktionslinien hierzu tangierend traciert und weiter so, daß sie die Rückfläche des Polschuhs senkrecht treffen. In der unteren Figurhälfte verläuft symmetrisch dazu die günstigste Begrenzungslinie eines hochgesättigten Einsatzes, durch Schraffierung gekennzeichnet. Die Permeabilität ist bekanntlich $\mu = \operatorname{tg} \delta' / \operatorname{tg} \delta$; sie variierte von rund 2 in der Mitte bis rund 10 am Rande der Kegelfläche und 20 an dem peripherischen Mantelstreifen.

Durch diesen treten infolgedessen offenbar unvermeidlich einige Induktionslinien aus, was eine geringe normale Magnetisierungskomponente bedingt; die Zusatzwirkung der entsprechenden Polelemente auf das zentrale Feld ist nur sehr gering und wird teilweise aufgehoben durch innere Senken infolge Divergenz. Abgesehen von diesen peripherischen Linien liegen die axialen Konvergenzpunkte der übrigen nahe beisammen; das Bild verträgt sich mit der Annahme eines mittleren Konvergenzpunktes *C* in 20—30 mm Entfernung von der Kegelspitze. Es leuchtet schließlich ein, daß die Erregung am besten durch eine kräftige Spule im Interferrum stattfände (vgl. § 4); das eingeprägte Feld einer solchen würde von vornherein schon den eingeschnürten Verlauf zeigen, wie er hier zutage tritt; nur die rein praktische Frage der Unzugänglichkeit bzw. des Raummangels ermöglicht dies meist nicht.

§ 30. Zweidimensionale Strömungsdiagramme; die elektrischen und Wärmeleitfähigkeiten betragen bei 18° für

Kupfer	$600 \cdot 10^{-8}$	} $\text{cm}^{-2} \text{sec}$	} $\frac{\text{cal}}{\text{grad} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec.}}$
Zink	160 „		
Blei	48 „		

Es wurden Schablonen geschnitten aus Zinkblech von 3 mm und dünnem Walzblei von 0,5 mm Stärke, am Rand einseitig bündig verlötet; das Verhältnis Zink-Blei ist in beiden Fällen 3,33 und entsprach also einer Permeabilität $3,33 \times 3/0,5 = 20$. An gewissen Stellen wurde die Zinkstärke reduziert entsprechend der verringerten Permeabilität des analogen magnetischen Problems; ausnahmsweise wurde Kupferblech verwendet zur Verwirklichung noch größerer Permeabilitäten. Kräftige Kupferstäbe markierten die Äquipotentiellen Elektroden bzw. die isotherme Wärmezufuhrstelle. Genauere Resultate erhält man nach Kirchhoff¹⁾ durch Abtasten mittels zweier Punktelektroden, wobei rein thermoelektrische Effekte passend eliminiert werden; man konstruiert so die Schar der Äquipotentiallinien. Zur raschen Orientierung bzw. Demonstration ist jenem etwas zeitraubenden Verfahren die Sichtbarmachung und Abzeichnung der Isothermen mittels der eleganten Verfärbungsmethode des Hrn. Richarz²⁾ unter Benutzung von Cupromercurijodid vorzuziehen. Wegen der nicht immer ganz stationären Wärmeströmung und der unvermeidlichen Wärmeverluste handelt es sich hierbei mehr um einen freilich sehr bequemen und instruktiven Überblick.

Orthogonal zur Schar der Äquipotentiallinien zeichnet man dann mittels einer Glasskala auf Pauspapier die Strömungslinien. Von den dergestalt für verschiedene Konfigurationen einzelner und gepaarter zweidimensionaler Armaturen erhaltenen Netzdiagrammen stellt Fig. 9 eins dar: An der schmälsten Stelle war das Zink ebenso dick wie das Blei, entsprechend einer Permeabilität 3,33, welche dann nach der Peripherie bis auf 20 anstieg. Die Konvergenz der Induktionslinien mit kon-

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 64. p. 467. 1845; Ges. Abh. p. 12, Leipzig 1882.

2) F. Richarz, Naturw. Rundschau 17. p. 478. 1902; O. Hess, Dissert. Marburg 1906.

kaver Äquipotentialfront im prismatischen Teil sowie die ebenso charakteristische Divergenz mit konvexer Front nahe der ebenen Stirnfläche tritt in diesem wie in allen sonstigen Diagrammen hervor. Ein Vergleich mit der rein magnetischen

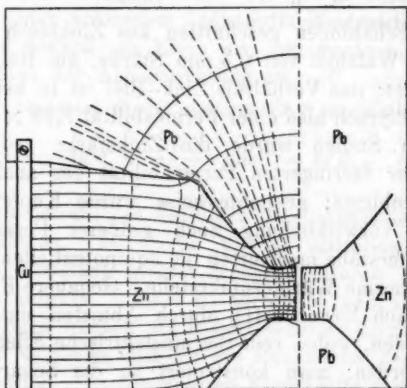


Fig. 9.

Fig. 8 zeigt die völlige Analogie, insbesondere betreffs der eigenartigen Umbiegung der gestrichelten Äquipotentialen nahe der Peripherie. Von anderen Diagrammen sei eines erwähnt, welches nicht parallele Flachpole darstellte ($\mu = \text{ca. } 50$); an der engeren Seite des Schlitzes zeigte sich eine etwas konkave Front, an der weiteren eine schwach konvexe (§ 26).

§ 31. *Bewickelung.* Die Halbringmagnete zeigten von jeher stets eine kürzere Relaxationsdauer¹⁾ als ein Vollring sie nach den vorstehenden Messungen aufweist (§ 6). Beim großen Modell Nr. 109 erforderte z. B. die Stromentstehung *et. par.* bei gleicher Erregung und geschlossenem magnetischen Kreis weniger als die Hälfte der aus § 7 zu entnehmenden Fristen, bei Nr. 77 noch kürzere Zeit.

Bei der weit unregelmäßigeren Anordnung lassen sich Berechnungen hierüber kaum durchführen. Die Hauptgründe für dieses praktisch vorteilhaftere Verhalten dürften folgende sein: Einmal ist die Leitfähigkeit und $d\mathcal{B}/d\mathcal{F}$ beim Stahl-

1) Vgl. z. B. J. Koenigsberger, *Ann. d. Phys.* 6. p. 513. 1901.

gaß stets geringer als beim Schmiedeeisen und wird des variablen Querschnitts wegen nicht überall gleichzeitig durchlaufen. Zweitens ist die Eigeninduktivität der Spulen geringer und ihr Widerstand relativ größer als bei der gleichmäßigen peripherischen Bewickelung des Vollrings. Übrigens verhalten sich verschiedene Exemplare in dieser Beziehung ganz individuell.

Über die Strombelastung und Abkühlung durch Wasserspülung wurden Dauerversuche angestellt an einem kleinen Versuchsmodell und sodann am großen und mittleren Normalmodell. Bei Einschaltung des angegebenen Betriebsstromes (Tab. 1) wird nach einer halben Stunde nahezu die stationäre Endtemperatur erreicht, welche dann stundenlang wenig schwankt, zuweilen auch wieder etwas abnimmt. Am bequemsten kontrolliert man sie laut Vorschrift des Verbandes deutscher Elektrotechniker durch Messung der Klemmenspannung, welche nach Division durch die Stromstärke den Gesamtwiderstand und damit die mittlere Temperatur ergibt. Die zulässige Betriebsstromdichte beträgt beim großen und mittleren Modell etwa 4–4,5 Amp. pro Quadratmillimeter. Es werden 80–90 Proz. der Stromwärme durch das Wasser abgeführt; dessen Temperaturerhöhung beträgt 2–4°, je nach der Einstellung des Wasserhahnes; ein solcher von nur 10 mm ($\frac{3}{8}$ Zoll) Öffnung liefert bei 3 Atm. Wasserleitungsdruck 17 l pro Minute, also nach Tab. 1 für alle Fälle genügend, so daß es ungewöhnlich hoher Drucke oder gar einer besonderen Zirkulationspumpe nicht bedarf.

Die vier Modelle werden von der Firma Hartmann und Braun A.-G. in Frankfurt a. M. gebaut. Das stete Interesse der Herren Prof. Dr. Hartmann, Dr. Bruger, Mohs und Oppel hat zum Erfolge der Konstruktion ungemein beigetragen. Die in § 20 aufgeführten Probespulen, sowie die meisten Hilfsapparate wurden angefertigt von Hrn. Mechaniker W. Schmitzdorf, Berlin-Treptow, Neuekrugallee 63. Die Herren Dr. W. J. de Haas, Prof. K. Honda, Prof. M. Owen und D. E. Roberts beteiligten sich an den vielen Messungen im hiesigen Laboratorium in dankenswerter Weise.

(Eingegangen 31. Juli 1913.)

4. *Über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik bewegter ponderabler Körper;* von Jun Ishiwara.

§ 1. Einleitung.

Die Einordnung aller bekannten reversiblen Prozesse unter ein einziges Prinzip, welches ihren Verlauf eindeutig bestimmt, ist seither eine der Hauptaufgaben der theoretischen Physik geworden, und man sieht jetzt als ein solches Prinzip bekanntlich das Prinzip der kleinsten Wirkung an.

In der Elektrodynamik hat schon Helmholtz¹⁾ eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung aufgestellt und daraus die Hertzschen Grundgleichungen sowie den Maxwellschen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft abgeleitet. Da man aber gegenwärtig statt der Hertzschen Elektrodynamik ein auf Grund des Einsteinschen Relativitätsprinzips aufgebautes System annimmt, so folgt daraus unter anderem, daß die ponderomotorische Kraft nicht bloß durch den Maxwellschen Spannungstensor bestimmt wird, sondern auch noch durch die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Bewegungsgröße. Einen Versuch, die elektromagnetischen Grundgleichungen sowie einen neuen, dem Relativitätsprinzip entsprechenden Ausdruck für die ponderomotorische Kraft aus einem Variationsprinzip herzuleiten, stellt die kürzlich erschienene Dissertation des Hrn. Henschke²⁾ dar.

Ihm ist dies durch Annahme eines vierdimensionalen Skalars für die Wirkungsgröße in bezug auf die Vorgänge im Vakuum auch gelungen. Doch hat er bei der Verallgemeinerung seiner für das Vakuum erhaltenen Resultate auf den Fall be-

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 47. p. 1. 1892. Wiss. Abh. III p. 476 u. p. 597. Leipzig 1895.

2) E. Henschke, Berliner Dissertation, 1912; Ann. d. Phys. 40. p. 887. 1913.

wegter ponderabler Körper nur die Minkowskischen Grundgleichungen, dagegen keinen für die ponderomotorische Kraft plausiblen Ausdruck ermitteln können. Mir scheint jedoch der Grund für diese Unzulänglichkeit nicht etwa in einer unzureichenden Verallgemeinerung der Wirkungsgröße zu liegen, sondern in erster Linie darin, daß Henschke die Variation der Wirkungsgröße nicht richtig ausgeführt hat.

Er hat in dieser Arbeit aber weiter gezeigt, daß man durch Einfügung eines neuen Gliedes in das Variationsprinzip den Kraftausdruck, der seinerzeit von Abraham¹⁾ aufgestellt wurde, ableiten kann, daß man alsdann jedoch leider darauf verzichten muß, dem so abgeänderten Prinzip eine bestimmte Wirkungsgröße zuzuordnen.

Die große Bedeutung des genannten Prinzips läßt eine erneute Analyse der von Henschke berührten Frage als wünschenswert erscheinen. In der vorliegenden Mitteilung möchte ich nun beweisen, daß die Annahme einer Form der Wirkungsgröße, wie sie uns in der ersten unmodifizierten Fassung Henschkes vorliegt, die zweifellos auch die nahe-
liegende und zutreffendste sein dürfte,²⁾ den schon früher von mir³⁾ aufgestellten Ausdruck für die ponderomotorische Kraft ergibt. Hierbei bediene ich mich einmal der von Lorentz⁴⁾ vorgeschlagenen Methode, nach der man die Variationen der von einem bestimmten substantiellen Punkte übertragenen Größen in Betracht zieht, ein anderes Mal der Helmholtzschen Methode, bei der demgegenüber die Variationen der Größen in einem festen Raumpunkte betrachtet werden. Beide Methoden ergeben natürlich konkordante Resultate.

Die so für den elektromagnetischen Spannungstensor und die elektromagnetische Bewegungsgröße abgeleiteten Ausdrücke

1) M. Abraham, Rendiconti Circ. math. Palermo 28. p. 1. 1909; 30. p. 33. 1910.

2) Daß der hier für die Wirkungsgröße angenommene Ausdruck auch aus der Elektronentheorie eindeutig folgt, soll in meiner demnächst erscheinenden Arbeit über „die elektronentheoretische Begründung der Elektrodynamik bewegter Körper“ gezeigt werden.

3) J. Ishiwara, Proc. Tōkyō math.-phys. Soc. (2) 5. p. 310. 1910; Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 9. p. 560. 1912.

4) H. A. Lorentz, Enzyklopädie d. math. Wiss. V, 2. Art. 13, p. 130.

sind identisch mit denjenigen Minkowskis.¹⁾ Was die hierbei bestehende Abweichung der elektromagnetischen Impulsdichte von dem durch das Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit dividierten Energiestrom betrifft, so glaube ich, daß dieselbe sich weder mit der Theorie noch mit den bisherigen Erfahrungen im Widerspruch befindet.

§ 2. Die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung.

Wir betrachten einen Raum Σ der vierdimensionalen Welt (im Minkowskischen Sinne), dessen dreidimensionale Begrenzung S genannt werde. Auf jede Volumeinheit des Bereiches Σ wirke eine ponderomotorische Viererkraft K , und auf jede Flächeneinheit der Begrenzung S ein Spannungstensor T . Beim mechanischen Gleichgewicht des gesamten Systems muß die Beziehung zwischen diesen beiden Größen bestehen:

$$(1) \quad \int_{\Sigma} K d\Sigma + \int_S (Tn) dS = 0,$$

wo n der Einheitsvierervektor nach der Richtung der äußeren Normale von dS ist. Nach dem Gauss'schen Satz transformierend, können wir aus (1) auch die für jedes Volumenelement geltende Gleichung

$$(2) \quad K = - \text{Div } T$$

erhalten.²⁾

Wir bezeichnen nun mit r den vom Koordinatenursprung nach einem in Betracht zu nehmenden Punkt gezogenen Radiusvektor. Dann ist jeder Volumeinheit die mechanische Wirkungsgröße im Betrag von (Kr) , jeder Flächeneinheit die im Betrag von $((Tn), r)$ zuzuordnen. Die gesamte mechanische Wirkungsgröße beträgt also

$$(3) \quad W^{(m)} = \int_{\Sigma} (Kr) d\Sigma + \int_S ((Tn), r) dS.$$

1) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908. p. 53; zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik (Leipzig 1910), p. 42.

2) Alle im vorliegenden für mathematische Operationen verwendeten Bezeichnungen decken sich mit jenen in meinem Bericht „über die Relativitätstheorie“ im Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik, I. c.

Es seien ferner \mathbf{F} und \mathbf{H} die beiden Sechservektoren des elektromagnetischen Feldes, \mathbf{P} der elektrische Viererstrom. Der Vektor \mathbf{F} soll sich aus dem elektromagnetischen Viererpotential Φ durch

$$(4) \quad \mathbf{F} = \text{Curl } \Phi$$

ergeben. Als elektromagnetische Wirkungsgröße wählen wir einen Skalar:

$$(5) \quad W^{(e)} = \int_{\Sigma} \{-U + (\mathbf{P}\Phi)\} d\Sigma,$$

wo

$$(6) \quad U = \frac{1}{4}(\mathbf{F}\mathbf{H})$$

der Überschuß der magnetischen über die elektrische Energiedichte ist.

Die gesamte Wirkungsgröße läßt sich aus den beiden Größen (3) und (5) zusammensetzen:

$$(7) \quad W = W^{(m)} + W^{(e)}.$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung soll nun in seiner Allgemeinheit heißen:

Die erste Variation der gesamten Wirkungsgröße W verschwindet für ein abgeschlossenes physikalisches System; also

$$(8) \quad \delta W = 0.$$

§ 3. Die Ableitung der Grundgleichungen.

Es soll zunächst aus dem oben formulierten Prinzip eine einfache Ableitung der elektromagnetischen Grundgleichungen gegeben werden.

Wir sehen für diesen Zweck die Lage der Materie, die materiellen Konstanten, den elektrischen Viererstrom und die mechanischen Kräfte sämtlich als bekannte Funktionen der Koordinaten gegeben an. Dagegen lassen wir das elektromagnetische Viererpotential Φ variieren und suchen die Bedingungen, die die Wirkungsgröße W zu einem Extremum machen sollen.

Hierbei verschwindet also die Variation der mechanischen Wirkungsgröße $W^{(m)}$ und ist

$$(9) \quad \delta \int (\mathbf{P}\Phi) d\Sigma = \int (\mathbf{P} \delta \Phi) d\Sigma.$$

Bei der Berechnung der Variation von U beachte man zunächst, daß U ein vierdimensionaler Skalar, d. h. eine Invariante gegenüber Raumzeittransformationen ist. Wenn man also die entsprechenden Größen im mit den ponderablen Körpern bewegten Bezugssystem durch einen Strich kennzeichnet, so besteht die Beziehung:

$$(10) \quad \frac{1}{2}(FH) = \frac{1}{2}(F' H') = \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mu} - \varepsilon \mathfrak{E}'^2.$$

Darin bedeutet ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, \mathfrak{E}' die elektrische Feldstärke und \mathfrak{B}' die magnetische Induktion. Diese beiden letzten Vektoren bilden in bekannter Weise den Sechservektor F' und stehen in engem Zusammenhang mit Φ .¹⁾

Die Variation von U , die eintritt, wenn man bei konstantem ε und μ den Wert von Φ variiert, ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\mathfrak{B}'}{\mu} \delta \mathfrak{B}' - \varepsilon \mathfrak{E} \delta \mathfrak{E}' = \frac{1}{2}(H' \delta F') \\ &= \frac{1}{2}(H \delta F), \end{aligned}$$

und folglich hat man

$$\delta \int_{\Sigma} U d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (H \delta F) d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (H, \text{Curl } \delta \Phi) d\Sigma.$$

Dieses Integral verwandelt sich aber noch durch partielle Integration in

$$\int_{\Sigma} (\text{Div } H, \delta \Phi) d\Sigma + \int_S (Hn) \delta \Phi dS.$$

Das Wirkungsprinzip (8) liefert daher die für jedes Volumenelement geltende Gleichung:

$$(11) \quad \text{Div } H = P,$$

und die für jedes Flächenelement geltende

$$(12) \quad (Hn) = 0.$$

Die Gleichung (11) und die bereits aus (4) nach der vektoranalytischen Formel:

$$\text{Div}(\text{Curl}^* \Phi) = 0$$

zu folgernde Gleichung:

1) Vgl. z. B. Minkowski, l. c.

$$(13) \quad \text{Div } \mathbf{F}^* = 0$$

bilden zusammen das System der Grundgleichungen.

Aus (11) folgt noch nach der Identität:

$$\text{div} (\text{Div } \mathbf{H}) = 0,$$

die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität:

$$(14) \quad \text{div } \mathbf{P} = 0.$$

Wir wollen hier noch die Formeln hinschreiben, die sich aus (11) und (13) durch Integration über ein beliebiges dreidimensionales Volumen S , dessen Begrenzung σ ist, ergeben:

$$\int_{\sigma} \mathbf{H}_{\sigma}^* d\sigma = \int_S \mathbf{P}_n dS,^1)$$

$$\int \mathbf{F}_{\sigma} d\sigma = 0,$$

und diejenige, die aus (4) durch Integration über eine beliebige zweidimensionale Fläche σ , deren Randkurve λ sei, geliefert wird:

$$\int_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} d\sigma = \int_{\lambda} \Phi_{\lambda} d\lambda.$$

Nach diesen Integralformeln ersieht man, daß den Größen $(\mathbf{P}_n dS)$, $(\mathbf{H}_{\sigma}^* d\sigma)$, $(\mathbf{F}_{\sigma} d\sigma)$, $(\Phi_{\lambda} d\lambda)$ für ein substantielles Teilchen bestimmte physikalische Bedeutungen zukommen.

§ 4. Die erste Methode der Ableitung der Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte.

Um die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte aus dem Variationsprinzip abzuleiten, haben wir nun die Variation der Koordinaten \mathbf{r} auszuführen. Wir denken uns nämlich eine virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{r}$ der substantiellen Punkte, und wir bezeichnen mit dem Zeichen δ , welches vor eine andere Größe gesetzt wird, diejenige Variation, die der einem und demselben substantiellen Punkte zugehörige Wert der betreffenden Größe durch die genannte virtuelle Verschiebung erleidet.

1) Es bedeutet \mathbf{H}_{σ}^* die Komponente von \mathbf{H}^* nach dem Flächenelement $d\sigma$, \mathbf{P}_n die Komponente von \mathbf{P} nach der äußeren Normale \mathbf{n} von dS .

Wir wollen nun annehmen, daß sämtliche für einen substantiellen Punkt charakteristischen physikalischen Größen bei der virtuellen Verschiebung des Punktes unverändert bleiben. Unter solchen Größen verstehen wir die oben hervorgehobenen elektromagnetischen Größen $(\mathbf{P}_n dS)$, $(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma)$, $(\mathbf{F}_\sigma d\sigma)$, $(\Phi_1 d\lambda)$, und außerdem die auf substantielles Element wirkenden, mechanischen Kräfte $(\mathbf{K} d\Sigma)$, $((\mathbf{T}\mathbf{n}) dS)$ sowie die materiellen Konstanten ϵ und μ . Es lauten also die Bedingungen:¹⁾

$$(15a) \quad \delta(\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = 0, \quad \delta(\mathbf{F}_\sigma d\sigma) = 0,$$

$$(15b) \quad \delta(\mathbf{P}_n dS) = 0, \quad \delta(\Phi_1 d\lambda) = 0,$$

$$(15c) \quad \delta(\mathbf{K} d\Sigma) = 0, \quad \delta((\mathbf{T}\mathbf{n}) dS) = 0,$$

$$(15d) \quad \delta\epsilon = 0, \quad \delta\mu = 0.$$

Unter diesen Bedingungen haben wir die Variation der Wirkungsgröße auszurechnen.

Zunächst die mechanische Wirkungsgröße betreffend, haben wir wegen (15c)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W^{(m)} &= \int (\mathbf{r}, \delta(\mathbf{K} d\Sigma)) + \int (\mathbf{K} \delta \mathbf{r}) d\Sigma = \int (\mathbf{r}, \delta((\mathbf{T}\mathbf{n}) dS)) \\ &+ \int ((\mathbf{T}\mathbf{n}) \delta \mathbf{r}) dS = \int (\mathbf{K} \delta \mathbf{r}) d\Sigma + \int ((\mathbf{T}\mathbf{n}) \delta \mathbf{r}) dS. \end{aligned} \right.$$

Versteht man nun für einen Augenblick unter dn ein Linienelement, welches auf die Richtung von Φ fällt, und unter dS ein zu dn senkrechtes Volumelement, so wird

$$\delta \int (\mathbf{P} \Phi) d\Sigma = \int ((\mathbf{P}_n dS) \delta(\Phi_n dn)) + \int ((\Phi_n dn) \delta(\mathbf{P}_n dS)),$$

welches aber wegen (15b) verschwindet.

Für die Variation des Integrals von U setze man zuerst

$$(17) \quad \delta \int U d\Sigma = \int \delta U d\Sigma + \int U \delta(d\Sigma).$$

Den Wert von δU berechnet man, indem man nunmehr die Größe $(\mathbf{F}\mathbf{H})$ statt (10) ausdrückt in der Form:

$$(18) \quad \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^* \mathbf{H}) = \mu \mathfrak{H}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\epsilon},$$

1) Es sind freilich nicht alle diese Bedingungen voneinander unabhängig.

wo \mathfrak{S}' die magnetische Feldstärke, \mathfrak{D}' die dielektrische Verschiebung ist, folgendermaßen:

$$(19) \quad \begin{cases} \delta U = \mu \mathfrak{S}' \delta \mathfrak{S}' - \frac{\mathfrak{D}'}{s} \delta \mathfrak{D}' = \frac{1}{2} (\mathbf{F} \delta \mathbf{H}) \\ = \frac{1}{2} (\mathbf{F} \delta \mathbf{H}). \end{cases}$$

Wir müssen noch $\delta \mathbf{H}$ in seiner Abhängigkeit von $\delta \mathbf{r}$ ausdrücken. Dazu verwenden wir die allgemeine Beziehung:

$$\delta (\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = \delta \mathbf{H}_\sigma^* \cdot d\sigma + \mathbf{H}_\sigma^* \delta (d\sigma),$$

und

$$\mathbf{H}_\sigma^* \delta (d\sigma) = -\{(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* + \text{Curl}(\mathbf{H}^*, \delta \mathbf{r})_\sigma d\sigma\},$$

woraus sich ergibt:

$$\delta (\mathbf{H}_\sigma^* d\sigma) = \{\delta \mathbf{H}^* - (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* - [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* - \text{Curl}(\mathbf{H}^*, \delta \mathbf{r})_\sigma d\sigma\}.$$

Da die linke Seite dieser Identität nach (15a) gleich Null zu setzen ist, kann man daraus schließen:

$$\delta \mathbf{H}^* = (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}^* + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}]^* + \text{Curl}(\mathbf{H}^*, \delta \mathbf{r}),$$

oder

$$(20) \quad \delta \mathbf{H} = (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} + [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}] + \text{Curl}^*(\mathbf{H}^*, \delta \mathbf{r}).$$

Setzt man diesen Wert in den Ausdruck (19) von δU ein, und integriert über den Bereich Σ , so bekommt man nach einer partiellen Integration und weiterer Umordnung

$$(21) \quad \begin{cases} \int_\Sigma \delta U d\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma (\mathbf{F}(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}) d\Sigma + \int_\Sigma (\mathbf{F}, \text{Div } \mathbf{H}) \delta \mathbf{r} d\Sigma \\ - \int_\Sigma (\mathbf{H}^*, \text{Div } \mathbf{F}^*) \delta \mathbf{r} d\Sigma - \int_\Sigma ((\mathbf{F}^* \mathbf{n})(\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})) dS. \end{cases}$$

Das andere Integral in (17) kann man, mit Rücksicht auf (6) und

$$(22) \quad \delta (d\Sigma) = \text{div}(\delta \mathbf{r}) d\Sigma,$$

so berechnen:

$$(23) \quad \int_\Sigma U \delta (d\Sigma) = - \frac{1}{2} \int_\Sigma (\delta \mathbf{r}, \diamond) (\mathbf{F} \mathbf{H}) d\Sigma + \frac{1}{2} \int_\Sigma (\mathbf{F} \mathbf{H}) (\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS.$$

Die Summe der beiden Integrale (21) und (23) beträgt also

1) Vgl. z. B. E. Henschke, Berliner Diss. I. c. p. 42.

2) I. c. p. 41, Gleichung (80), u. p. 42, Gleichung (79).

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\Sigma} U d\Sigma &= \int_{\Sigma} (F, \text{Div } H) \delta r d\Sigma - \int_{\Sigma} (H^*, \text{Div } F^*) \delta r d\Sigma \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (F(\delta r, \diamond) H) d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\delta r, \diamond) (F H) d\Sigma \\ &- \int_S ((F^* n)(H^* \delta r)) dS + \frac{1}{2} \int_S (F H) (\delta r, n) dS. \end{aligned} \right.$$

Eine Rücksicht auf die Grundgleichungen (11) sowie (13) und einige Umformungen führen diese Gleichung noch zu

$$(24') \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{\Sigma} U d\Sigma &= \int_{\Sigma} (F P) \delta r d\Sigma + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (F(\delta r, \diamond) H) d\Sigma \\ &- \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (H(\delta r, \diamond) F) d\Sigma + \frac{1}{2} \int_S ([F H], n) \delta r dS \\ &- \frac{1}{2} \int_S ([H^* F^*], n) \delta r dS. \end{aligned} \right.$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ergibt daher die Forderung:

$$(25) \quad K = (F P) + \frac{1}{4} (F \diamond H) - \frac{1}{4} (H \diamond F)^1,$$

und

$$(26) \quad T = -\frac{1}{2} \{ [[H^* F^*]] - [[F H]] \}.$$

Man kann leicht verifizieren, daß diese beiden Ausdrücke (25) und (26) gerade der Gleichung (2) genügen.

§ 5. Die zweite Methode der Ableitung der Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte.

Es sei noch in Kürze erörtert, daß die Ableitung des Kraftausdruckes nach Helmholtz in der Weise erzielt werden kann, daß man nicht wie im vorigen Paragraphen die Variation der einem bestimmten substantiellen Punkte zugehörigen Werte der physikalischen Größen, sondern im Gegenteil die Variation der Größen in einem festgehaltenen Raumpunkte betrachtet. Diese Variation wollen wir nach Henschke lokale Variation nennen und mit dem Zeichen δ_0 bezeichnen.

Hier muß man beachten, daß man bei dem Wirkungsprinzip immer die gesamte Variation der Wirkungsgröße des

1) Es ist $(F \diamond H)_j = \sum_{h=1}^3 \sum_{k=1}^3 (F_{hk} \frac{\partial}{\partial r_j} H_{hk})$ für $j = 1, 2, 3, 4$.

ganzen abgeschlossenen physikalischen Systems zu berücksichtigen hat, daß man also außer der gesamten lokalen Variation der Wirkungsgröße im festgehaltenen Raum Σ noch dem Umstande Rechnung zu tragen hat, daß durch die Verschiebung $\delta \mathbf{r}$ der substantiellen Punkte ein Teil der dem genannten physikalischen System zugehörigen Wirkungsgröße außerhalb des Raumes Σ übertragen wird.

Für die gesamte Variation von W ist daher zu setzen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W &= \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K} \mathbf{r}) d\Sigma + \int_S (\mathbf{K} \mathbf{r})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS + \int_S ((\mathbf{T} \mathbf{n}), \delta \mathbf{r}) dS \\ &+ \int_{\Sigma} \delta_0 \{ -U + (\mathbf{P} \Phi) \} d\Sigma + \int \{ -U + (\mathbf{P} \Phi) \} (\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen zuerst die zwei ersten Integrale behandeln. Da allgemein

$$\delta(\mathbf{K} d\Sigma) = \delta \mathbf{K} \cdot d\Sigma + \mathbf{K} \delta(d\Sigma)$$

und

$$\delta \mathbf{K} = \delta_0 \mathbf{K} + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K}$$

ist, so erhält man noch mit Rücksicht auf (22)

$$\delta(\mathbf{K} d\Sigma) = \{ \delta_0 \mathbf{K} + (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K} + \mathbf{K} \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}) \} d\Sigma.$$

Die Bedingung (15c) ergibt demnach

$$\delta_0 \mathbf{K} = -(\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K} - \mathbf{K} \operatorname{div}(\delta \mathbf{r}),$$

mit dessen Hilfe man das fragliche Integral so berechnen kann:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K} \mathbf{r}) d\Sigma &= \int_{\Sigma} (\mathbf{r} \delta_0 \mathbf{K}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} (\mathbf{r}, (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{K}) d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma} (\delta \mathbf{r}, \diamond)(\mathbf{r} \mathbf{K}) d\Sigma - \int_S (\mathbf{r} \mathbf{K})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS; \end{aligned}$$

und man bekommt daraus

$$(28) \quad \int_{\Sigma} \delta_0(\mathbf{K} \mathbf{r}) d\Sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{r}, \mathbf{K})(\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS = \int_{\Sigma} (\mathbf{K}, \delta \mathbf{r}) d\Sigma.$$

Zur Berechnung der zwei letzten Integrale in (27) schicken wir die Kenntnis der Beziehungen voraus:

$$\delta_0 \mathbf{P} = \operatorname{div} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r} - \operatorname{Div}[\mathbf{P}, \delta \mathbf{r}],$$

$$\delta_0 \Phi = (\operatorname{Curl} \Phi, \delta \mathbf{r}) - \operatorname{Grad}(\Phi, \delta \mathbf{r}),$$

welche aus dem Verschwinden der beiden Ausdrücke (15b):

$$\delta(P_n dS) = \{\delta_0 P - (\operatorname{div} P, \delta r) + \operatorname{Div} [P, \delta r]\}_n dS,$$

$$\delta(\Phi_\lambda d\lambda) = \{\delta_0 \Phi - (\operatorname{Curl} \Phi, \delta r) + \operatorname{Grad} (\Phi, \delta r)\}_\lambda d\lambda^1)$$

entstehen. Dadurch findet man nach partiellen Integrationen

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (\Phi \delta_0 P) d\Sigma &= \int_{\Sigma} \operatorname{div} P, (\Phi, \delta r) d\Sigma + \int_{\Sigma} ((P, \operatorname{Curl} \Phi), \delta r) d\Sigma \\ &\quad + \int_S (Pn)(\Phi, \delta r) dS - \int_S (P\Phi)(\delta r, n) dS, \\ \int_{\Sigma} (P \delta_0 \Phi) d\Sigma &= \int_{\Sigma} (P, (\operatorname{Curl} \Phi, \delta r)) d\Sigma - \int_{\Sigma} \operatorname{div} P (\Phi, \delta r) d\Sigma \\ &\quad - \int_S (Pn)(\Phi, \delta r) dS \end{aligned}$$

und noch durch Addierung dieser beiden Gleichungen

$$(29) \int_{\Sigma} \delta_0 (P\Phi) d\Sigma + \int_S (P\Phi) \delta r, n) dS = 2 \int_{\Sigma} \operatorname{div} P (\Phi, \delta r) d\Sigma,$$

das infolge von (14) verschwindet.

Was nun $\delta_0 U$ betrifft, so muß man beachten, daß man im Gegensatz zur Variation δU hier die Änderung der materiellen Konstanten ε und μ in Betracht zu ziehen hat, weil nach der Verschiebung der substantiellen Punkte ein anderer Teil der Substanz (mit anderem ε und μ) in den betrachteten Raumpunkt eintreten wird. Man hat deswegen jetzt statt (19) folgendermaßen zu verfahren:

$$\begin{aligned} (30) \quad \delta_0 U &= \frac{1}{2} \delta_0 \left(\mu \mathfrak{F}'^2 - \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon} \right) \\ &= \mu \mathfrak{F}' \delta_0 \mathfrak{F}' - \frac{\mathfrak{D}'}{\varepsilon} \delta_0 \mathfrak{D}' + \frac{1}{2} \left(\mathfrak{F}'^2 \delta_0 \mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{\varepsilon^2} \delta_0 \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Den Ausdruck für $\delta_0 \varepsilon$ und $\delta_0 \mu$ erhält man aber aus dem Verschwinden der Variationen:

$$\delta \varepsilon = \delta_0 \varepsilon + (\delta r, \diamond) \varepsilon,$$

$$\delta \mu = \delta_0 \mu + (\delta r, \diamond) \mu,$$

(vgl. (15d)), und zwar in der Form:

$$\delta_0 \varepsilon = -(\delta r, \diamond) \varepsilon, \quad \delta_0 \mu = -(\delta r, \diamond) \mu.$$

Setzt man diese Werte in (30) ein, so wird der Ausdruck in der Klammer

1) Vgl. z. B. E. Henschke, Berl. Diss. I. c. p. 41, Gleichung (77) u. p. 43, Gleichung (82).

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'^2 \delta_0 \mu + \frac{\mathfrak{D}'^2}{s^2} \delta_0 \varepsilon = & - \mathfrak{H}'^2 (\delta \mathbf{r}, \diamond) \left(\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{H}'} \right) - \mathfrak{E}'^2 (\delta \mathbf{r}, \diamond) \left(\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}'} \right) \\ & = \mathfrak{B}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{H}' - \mathfrak{H}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{B}' + \mathfrak{D}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathfrak{D}', \end{aligned}$$

und daher geht $\delta_0 U$ über in

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0 U = & \frac{1}{2} \mathbf{F}' \delta_0 \mathbf{H} + \frac{1}{4} \{ \mathbf{F}' (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F}' \} \\ & = \frac{1}{2} \mathbf{F} \delta_0 \mathbf{H} + \frac{1}{4} \{ \mathbf{F} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F} \}. \end{aligned} \right.$$

Die lokale Variation $\delta_0 \mathbf{H}$ verbindet sich mit $\delta \mathbf{H}$ in der Weise:

$$\delta_0 \mathbf{H} = \delta \mathbf{H} - (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H}$$

und wird also nach (20)

$$(32) \quad \delta_0 \mathbf{H} = [\text{Div } \mathbf{H}, \delta \mathbf{r}] + \text{Curl}^* (\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r}).$$

Wir erhalten also aus (31) und (32)

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \delta_0 U d\Sigma = & \int_{\Sigma} (\mathbf{F} \text{Div } \mathbf{H}) \delta \mathbf{r} d\Sigma - \int_{\Sigma} (\mathbf{H}^*, \text{Div } \mathbf{F}^*) \delta \mathbf{r} d\Sigma \\ & + \frac{1}{4} \int_{\Sigma} (\mathbf{F} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{H} - \mathbf{H} (\delta \mathbf{r}, \diamond) \mathbf{F}) d\Sigma - \int_S ((\mathbf{F}^* \mathbf{n}) (\mathbf{H}^* \delta \mathbf{r})) dS, \end{aligned}$$

und daher für

$$\int_{\Sigma} \delta_0 U d\Sigma + \int_{\Sigma} U (\delta \mathbf{r}, \mathbf{n}) dS$$

genau denselben Ausdruck wie (24) oder (24').

Wir gelangen somit aus dem Wirkungsprinzip auf Grund der Formel (27) zu denselben Forderungen wie (25) und (26), was zu erwarten ist.

§ 6. Weitere Betrachtungen der Resultate.

Die vierdimensionale Vektorgleichung (25) umfaßt die gewöhnliche Energiegleichung:

$$(33) \quad \mathfrak{R}_t = -\text{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B})$$

und die Impulsgleichung:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{R} = & \mathfrak{E} \varrho + \frac{1}{c} [\mathfrak{S} + \mathbf{v} \varrho, \mathfrak{B}] + \frac{1}{2} (\mathfrak{D} \nabla \mathfrak{E}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \nabla \mathfrak{D}) \\ & + \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \nabla \mathfrak{H}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{H} \nabla \mathfrak{B}). \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet ρ die elektrische Ladungsdichte, \mathfrak{J} den elektrischen Leitungsstrom, v die Geschwindigkeit der Körper, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Es ist wohl bemerkenswert, daß der aus dem Wirkungsprinzip so abgeleitete Ausdruck für die ponderomotorische Kraft \mathfrak{R} vollkommen derjenigen entspricht, die ich früher durch Transformation der Energiegleichung des mitbewegten Systems auf ein relativ zur Materie bewegtes Bezugssystem erhalten habe.¹⁾ Daß dieser Ausdruck allen bisherigen Erfahrungen entspricht, ist auch schon gezeigt.

Der vierdimensionale Tensor T enthält in bekannter Weise den Spannungstensor \mathfrak{T} , die Impulsdichte g , den Energiestrom \mathfrak{S} und die Energiedichte u des elektromagnetischen Feldes. Diese Größen sind nach der Formel (26) so bestimmt:

$$(35) \quad \begin{cases} \mathfrak{T} = [[\mathfrak{E} \mathfrak{D}]] + [[\mathfrak{H} \mathfrak{B}]] - \frac{1}{2} t \{ (\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B}) \}, \\ g = \frac{1}{c} [\mathfrak{D} \mathfrak{B}], \\ \mathfrak{S} = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}], \\ u = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}). \end{cases}$$

Der Ausdruck (26) für T ist zuerst von Minkowski²⁾ abgeleitet und dann von mir, verknüpft mit dem oben angegebenen Ausdruck für \mathfrak{R} .³⁾ Er ist unsymmetrisch, selbst für ruhende Körper. Die bekannte Beziehung:

$$(36) \quad g = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}$$

muß danach lediglich auf das Vakuum beschränkt werden.

Im Gegensatz zu dieser Behauptung fordern einige andere theoretische Physiker die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (36).

1) J. Ishiwara, l. c.

2) t sei ein derartiger Tensor, dessen drei diagonale Komponenten gleich 1 sind, dessen sechs Schubkomponenten aber sämtlich verschwinden.

3) Minkowski, l. c.

4) Bei Minkowski ist für die ponderomotorische Viererkraft nicht die Größe K , sondern der zum Bewegungsvektor v normale Vektor $K + (v K) v$ angenommen. Daß die Annahme dieses letzten Kraftausdruckes allerdings zu physikalisch unwahrscheinlichem Ausdruck für die Joulesche Wärme führt, hat Abraham (Phys. Zeitschr. 10. p. 737. 1909) diskutiert. (Vgl. J. Ishiwara, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. l. c. p. 606).

So hat Abraham¹⁾ sich bemüht, unter Festhalten an dieser Gleichung den Ausdruck für den Welttensor aufzufinden. Grammel²⁾ hat sich auch kürzlich mit der Aufstellung verschiedener möglichen Ausdrücke für T , welche im Falle der Ruhe symmetrisch werden soll, beschäftigt.³⁾ Laue⁴⁾ hat im Anschluß an Planck⁵⁾ die Gleichung (36) als den Satz von der Trägheit der Energie bezeichnet und als einen Grundsatz der allgemeinen Dynamik hervorgehoben. Es scheint mir allerdings für die Behauptung, daß (36) die universelle Gültigkeit haben soll, kein tieferer Grund vorzuliegen als der, daß dadurch die betreffenden Komponenten des Welttensors T symmetrisch werden.

Man hat zwar die Existenz der Trägheit der strahlenden Energie einmal im Anschluß an die Gleichung (36) nachweisen können. Das Wesen der Trägheit besteht indessen nicht in der Gültigkeit der genannten Gleichung selbst, sondern überhaupt in dem Begriffe des Impulses, der sich mit der ihn tragenden Energie in einem anderen quantitativen Zusammenhang als (36) befinden dürfte.

Man wäre übrigens wegen der Einfachheit dieser Relation auch dazu geneigt, ihr eine prinzipielle Bedeutung zuzuschreiben. Mit ihr aber sind andererseits, wie Grammel in der oben zitierten Arbeit gezeigt hat, leider nur sehr komplizierte Ausdrücke für den Welttensor vereinbar, welche also immer mit den die Geschwindigkeit der Körper explizite enthaltenden Gliedern versehen werden müßten. Nach der Untersuchung von Henschke erscheint es auch sehr wahrscheinlich, daß, wenn man den Abrahamschen Kraftausdruck als

1) M. Abraham, l. c.

2) R. Grammel, Ann. d. Phys. 41. p. 570. 1913.

3) Es ist der Vollständigkeit halber zu erwähnen, daß G. Nordström bei der Behandlung der Lorentzschen Elektrodynamik der Impulse einen Ausdruck $1/c[\mathcal{E}\mathcal{B}]$ zugeschrieben hat, wodurch die Symmetrie des Welttensors für ruhende Körper schon aufgegeben ist. (Die Energiegleichung für das elektromagnetische Feld bewegter Körper, Helsingfors 1908, p. 49. Gleichung (103)).

4) M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. (Braunschweig 1913) p. 164.

5) M. Planck, Phys. Zeitschr. 9. p. 828. 1909; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 6. p. 728. 1908.]

berechtigt annimmt, in dem Variationsprinzip von einer bestimmten Wirkungsgröße kaum mehr die Rede sein kann.

Unser Ausdruck hat demgegenüber den Vorzug, erstens, daß er die Geschwindigkeit der Körper vollständig nur implizite enthält und genau dieselbe Form wie im mitbewegten System hat, was eben dem von Minkowski an der Spitze seiner grundlegenden Abhandlung aufgestellten „Postulat der Relativität“ entspricht, und zweitens, daß er aus dem als die naheliegendste Verallgemeinerung des Variationsprinzips für das Vakuum anzusehenden Prinzip hergeleitet werden kann.

Ich habe übrigens bereits vor drei Jahren in einer Mitteilung¹⁾ gezeigt, daß bei der Berechnung des Strahlungsdruckes auf einen vollkommenen Spiegel, der in einem durchsichtigen materiellen Lichtmedium aufgestellt ist, der Energiesatz einerseits und der Impulssatz andererseits in bezug auf ein relativ bewegtes Bezugssystem nur dann ein übereinstimmendes Resultat ergeben, wenn man für g und \mathfrak{E} die Ausdrücke in (35) annimmt. Dagegen würde man durch die Annahme von (36) zu einem Widerspruch gelangen.

An diese Frage anknüpfend, dürfte es von Interesse sein, zu erwähnen, daß in der Optik bewegter isotroper Körper die Impulsstrahlung, als $1/c$ [D B] definiert, sich in der Richtung der Wellennormale befindet, während man die Energiestrahlung durch den nicht immer auf die Wellennormale fallenden Vektor c [E S] ausdrückt.²⁾

Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit die Ausdrücke (25) und (26) für die ponderomotorischen Kräfte auch direkt elektronen-theoretisch begründet zu haben glaube, was mir als eine weitere Stütze für ihre Richtigkeit erscheint.

Zürich, 15. Juli 1913.

1) J. Ishiwara, Proc. Tōkyō math.-phys. Soc. I. c. p. 324.

2) J. Ishiwara, I. c. Vgl. noch Proc. Tōkyō math.-phys. Soc. (2) 5 p. 327. 1910.

(Eingegangen 24. Juli 1913.)

5. Einwellige gekoppelte Schwingungssysteme; von Alfred Kalähne.

Einleitung.

Durchgehends benutzte Bezeichnungen:

- δ_1, δ_2 und d_1, d_2 : Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente der freien (ungekoppelten) Teilsysteme;
 n_1, n_2 : Kreisfrequenzen der ungedämpften freien Systeme;
 ν_1, ν_2 : Kreisfrequenzen der gedämpften freien Systeme;
 δ', δ'' und d', d'' : Dämpfungskonstanten und logar. Dekremente (der Hauptschwingungen) des gekoppelten Systems;
 ν', ν'' : Kreisfrequenzen der Hauptschwingungen des gedämpften Koppelungssystems;
 $\phi_1, \phi_2; \sigma_1, \sigma_2; \vartheta_1, \vartheta_2$: Wiensche Koppelungskoeffizienten;
 K : Koppelungsparameter;
 h : Verstimmung (Frequenzverhältnis) n_2/n_1 ;
 s : Verhältnis der Dämpfungen δ_2/δ_1 ;
 x : Koeffizient zur Unterscheidung der drei Fälle A, B und C;
 Fall A ($x = 1$): gleiche Frequenzen und Dämpfungen } der Hauptschwin-
 Fall B ($x > 1$): ungleiche Frequenzen, gleiche Dämpfung } gungen des ge-
 Fall C ($x < 1$): gleiche Frequenz, ungleiche Dämpfungen } koppelten Systems.

§ 1. Die Theorie der gekoppelten Schwingungen, die im Anschluß an die Theorie der materiellen Punktsysteme von M. Wien,¹⁾ P. Drude²⁾ u. a. ausgestaltet worden ist, ergibt, daß im allgemeinen so viel verschiedene Schwingungstypen in dem System vorhanden sein können, als dasselbe Freiheitsgrade besitzt. Jedem Typus entspricht im allgemeinen ein besonderer Wert der Schwingungsfrequenz und der Dämpfung, mit anderen Worten: gekoppelte Systeme sind im allgemeinen mehrwellig. Sind im einfachsten Fall zwei Systeme mit je einem Freiheitsgrade zu einem System verkoppelt, das zwei Freiheitsgrade besitzt, so hat man in diesem zwei Eigenschwingungen (Hauptschwingungen) mit zwei im allgemeinen

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512. 1904.

verschiedenen Frequenzen und Dämpfungen zu erwarten. Man kann das auch so ausdrücken: in jedem der beiden gekoppelten Teilsysteme, die ungekoppelt jedes für sich eine Schwingung mit je einer Frequenz und Dämpfung ausführen, finden zwei übereinandergelagerte Schwingungen statt. Die Frequenzen und Dämpfungen derselben sind von denen der ungekoppelten Systeme und im allgemeinen auch untereinander verschieden, und zwar auch dann, wenn die ungekoppelten Systeme gleiche Frequenz bzw. auch gleiche Dämpfung besitzen, wenn also ein Resonanzfall vorliegt.

Zur Berechnung der Frequenzen hat man die sogenannte *Säkulargleichung* (auch *charakteristische* oder *determinierende* genannte Gleichung) zu lösen, eine algebraische Gleichung vom Grade 2α , wenn α die Anzahl der Freiheitsgrade des ganzen Systems ist; bei dem als Beispiel angeführten System mit zwei Freiheitsgraden ist dies eine Gleichung vom vierten Grade. Dieser einfachste Fall des gekoppelten Systems soll weiterhin allein betrachtet werden. Die komplizierteren Fälle mit mehr als zwei Freiheitsgraden verhalten sich im Prinzip ähnlich.

Um die rechnerischen Unbequemlichkeiten zu vermeiden, die die Auflösung biquadratischer und erst recht natürlich höherer Gleichungen in sich birgt, hat man versucht, die entstehenden Gleichungen auf einen geringeren Grad herunterzubringen.¹⁾ Vom mathematischen Standpunkt aus ist klar, daß diese Versuche für den allgemeinen Fall erfolglos sein müssen. Nur in besonderen Ausnahmefällen tritt eine Erniedrigung des Grades der Gleichung wirklich ein. Dazu gehören insbesondere Ausartungsfälle, wie der von L. Cohen behandelte Fall zweier gekoppelter elektromagnetischer Schwingungskreise, bei denen die Koppelung verschwindet.²⁾ Es wäre aber falsch, zu glauben, daß nur Ausartungsfälle, die natürlich kein physikalisches Interesse bieten, zur Erniedrigung des Grades der Bestimmungsgleichung führen. Es läßt sich ganz einfach nachweisen, daß auch physikalisch brauchbare

1) Vgl. z. B. L. Cohen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. 2. p. 448. 1900.

2) Über den Nachweis dafür, daß die von Cohen vorgeschlagene Auflösung der biquadratischen, charakteristischen oder Säkulargleichung nur in dem angeführten Ausartungsfall zulässig ist, vgl. A. Kalähne, Jahrb. d. drahtl. Telegr. 4. p. 357. 1911.

Fälle dafür in Betracht kommen, nämlich diejenigen Fälle, wo entweder mehrere Wurzeln der Gleichung identisch sind, oder wo wenigstens ihre reellen oder ihre imaginären Teile für sich einander gleich sind. Komplex sind die Wurzeln immer, wenn es sich um Schwingungen und nicht um aperiodische Vorgänge in den gekoppelten Systemen handelt, und nur Schwingungen sollen hier berücksichtigt werden. Man erhält in diesen Fällen also *einwellige* gekoppelte Schwingungssysteme oder *mehrwellige* Schwingungen, aber mit gleicher Dämpfung.

Die genannten Fälle sind als Sonderfälle der allgemeinen Lösung zum Teil schon in den Arbeiten von Wien, Drude usw. mit enthalten. Im Zusammenhang und von dem hier gekennzeichneten Standpunkt aus sind sie noch nicht behandelt worden. Sie haben aber sowohl für das Gebiet der elektromagnetischen Schwingungen und drahtlosen Telegraphie, als auch für die Koppelungstheorie des Zeemaneffektes¹⁾ ihre Bedeutung und es ist deshalb im folgenden versucht worden, möglichst allgemein für ein aus zwei Teilsystemen gekoppeltes System mit zwei Freiheitsgraden die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen der eine oder andere der drei Fälle eintritt, und welche Folgen sich daran knüpfen.

Die Arbeit zerfällt in drei Teile:

I. Einen mathematischen Teil, in dem die Bedingungen für das Zustandekommen der drei genannten Sonderfälle bei einer biquadratischen Gleichung rein mathematisch behandelt werden.

II. Einen allgemeinen physikalischen Teil, in dem die verschiedenen Arten der Koppelung nach denselben Gesichtspunkten untersucht und die dabei geltenden Beziehungen zwischen Frequenz, Dämpfung und Koppelung aufgestellt werden, und

III. einen speziellen physikalischen Teil, in dem die abgeleiteten Sätze auf einzelne besondere Schwingungssysteme angewandt werden.

1) Vgl. besonders W. Voigt, Ann. d. Phys. 36. p. 904. 1911; 40. p. 368. 1913; 41. p. 403. 1913.

Erster Teil.

§ 2. Reduktionsbedingungen der biquadratischen Gleichung. Die biquadratische Gleichung

$$(1) \quad f(\zeta) = \zeta^4 + a_3 \zeta^3 + a_2 \zeta^2 + a_1 \zeta + a_0 = 0$$

mit den reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 habe die vier Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$. Die Gleichung (1) läßt sich dann schreiben

$$(1a) \quad f(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)(\zeta - \zeta_4) = 0,$$

und die Koeffizienten sind durch die vier Wurzeln auszudrücken in der Form

$$(2) \quad \begin{cases} a_3 = -(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4) \\ a_2 = +(\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_3 \zeta_4) \\ a_1 = -(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_1 \zeta_2 \zeta_4 + \zeta_1 \zeta_3 \zeta_4 + \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4) \\ a_0 = +\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4. \end{cases}$$

Setzt man

$$(3) \quad \zeta = \zeta' - \frac{a_3}{4},$$

so geht (1) über in die reduzierte Form

$$(4) \quad \zeta'^4 + a \zeta'^2 + b \zeta' + c = 0,$$

wobei die neuen Koeffizienten a, b, c gegeben sind durch

$$(5) \quad \begin{cases} a = a_2 - \frac{3}{8} a_3^2 \\ b = a_1 - \frac{a_3}{2} \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right) \\ c = a_0 - \frac{a_3}{4} \left[a_1 - \frac{a_3}{4} \left(a_2 - \frac{3 a_3^2}{16} \right) \right]; \end{cases}$$

durch Einsetzen der Werte $a_0 \dots a_3$ aus (2) lassen sie sich als Funktionen der Wurzeln darstellen.

Uns interessiert hauptsächlich der Fall komplexer Wurzeln der Gleichung (1). Wegen der Reellität der Koeffizienten $a_0 \dots a_3$ müssen diese paarweis konjugiert komplex sein, also

$$(6) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \xi_1 + i \eta_1, & \zeta_3 = \xi_1 - i \eta_1 \\ \zeta_2 = \xi_2 + i \eta_2, & \zeta_4 = \xi_2 - i \eta_2. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in (2) und (5) ein, so ergibt sich

$$(2a) \quad \begin{cases} a_3 = -2(\xi_1 + \xi_2) \\ a_2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + 4\xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 \\ a_1 = -2\xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2\xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) \\ a_0 = (\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2), \end{cases}$$

und

$$(5a) \quad \begin{cases} a = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2 \\ b = (\eta_1^2 - \eta_2^2)(\xi_1 - \xi_2) \\ c = \eta_1^2 \eta_2^2 + \frac{1}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^2 + \frac{1}{16}(\xi_1 - \xi_2)^4 \end{cases}$$

Aus (5a) folgt sofort, daß sich die biquadratische Gleichung (4) und damit auch ihre nichtreduzierte Form (1) in gewissen besonderen Fällen zu einer quadratischen Gleichung vereinfacht, nämlich immer dann, wenn der Koeffizient b der Gleichung (4) verschwindet. Das geschieht in den drei Fällen

$$(7) \quad \begin{cases} A, \text{ wenn gleichzeitig } \xi_1 = \xi_2 \text{ und } \eta_1 = \eta_2, \\ B, \text{ wenn nur } \xi_1 = \xi_2, \\ C, \text{ wenn nur } \eta_1 = \eta_2 \end{cases}$$

ist.

Im Falle A sind die beiden Wurzelpaare identisch; im Falle B sind ihre reellen Teile, im Falle C ihre imaginären Teile einander gleich.

Die gemeinsame Bedingungsgleichung für diese drei Fälle, in denen die biquadratische Gleichung in eine quadratische ausartet, ist somit folgende Gleichung zwischen den Koeffizienten der Gleichung (1)

$$(8) \quad b = a_1 - \frac{a_2}{2} \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right) = 0.$$

Ist sie erfüllt, so geht die reduzierte Gleichung (4) über in

$$(4a) \quad \zeta'^4 + a \zeta'^2 + c = 0$$

mit der Lösung

$$(9) \quad \zeta' = \pm \sqrt{\zeta'^2} = \pm \sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - c}},$$

die durch wechselseitige Kombination der doppelten Vorzeichen vier, im allgemeinen verschiedene, Wurzeln ζ' liefert. Die vier Wurzeln ζ der ursprünglichen biquadratischen Gleichung (1) werden demnach

$$(10) \quad \zeta = -\frac{a_3}{4} \pm \sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - c}}.$$

Sowohl in Gleichung (9) wie in (10) sind die Größen a und c nach (5) durch a_0, a_1, a_2, a_3 auszudrücken.

Sind a und c positiv — und nur dieser Fall kommt in Betracht —, so werden die ζ' immer rein imaginär oder komplex, und zwar rein imaginär, wenn $a^2 = 4c$ oder $a^2 > 4c$, komplex, wenn $a^2 < 4c$ ist. Diese drei Fälle sind, wie leicht nachzuweisen, identisch mit den oben in (7) angeführten Sonderfällen A, B, C. Man erhält den Fall

$$(11) \quad \begin{cases} \text{A, wenn } a^2 = 4c; \\ \text{B, wenn } a^2 > 4c; \\ \text{C, wenn } a^2 < 4c \end{cases}$$

ist. Es ergibt sich nämlich durch einfache Ausrechnung, die nur im Fall C wegen der Umformung der komplexen Größen etwas umständlicher ist,

A. $a^2 = 4c$:

$$(12a) \quad \begin{cases} \zeta_1' = \zeta_2' = +\sqrt{-\frac{a}{2}} = +i\sqrt{\frac{a}{2}} \\ \zeta_3' = \zeta_4' = -\sqrt{-\frac{a}{2}} = -i\sqrt{\frac{a}{2}} \end{cases}$$

B. $a^2 > 4c$:

$$(12b) \quad \begin{cases} \zeta_1' = +i\sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4c}}, & \zeta_2' = +i\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4c}}, \\ \zeta_3' = -i\sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4c}}, & \zeta_4' = -i\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4c}}. \end{cases}$$

C. $a^2 < 4c$:

$$(12c) \quad \begin{cases} \zeta_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} - a} + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + a}, \\ \zeta_2' = -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} - a} + \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + a}, \\ \zeta_3' = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} - a} - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + a}, \\ \zeta_4' = -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{c} - a} - \frac{i}{2}\sqrt{2\sqrt{c} + a}. \end{cases}$$

Einsetzen der Werte a und c aus (5) ergibt die Wurzeln ζ' als Funktionen der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 ; doch werden die Formeln zum Teil sehr lang und unübersichtlich.

Durch Hinzufügen des Wertes $-a_3/4$ erhält man aus diesen ζ' -Werten die Wurzeln ζ der Gleichung (1) selber. Man erkennt, daß sie die in (6) angegebene Form haben, und daß

entweder die imaginären Teile (Fall C), oder die reellen Teile (Fall B), oder beide zusammen einander gleich werden (Fall A).

§ 3. Einführung der Koeffizienten $a_0 \dots a_3$ in die Bedingungsgleichungen. Es sollen nun statt der Koeffizienten a, b, c die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der unreduzierten Gleichung (1) eingeführt und die gemeinsame Bedingung (8) für die Zurückführung auf eine quadratische Gleichung, sowie die drei unterscheidenden Bedingungen der Fälle A, B, C in ihnen ausgedrückt werden.

Man erhält die gemeinsame Bedingung

$$(13) \quad a_1 - \frac{a_3}{2} \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right) = 0,$$

die unterscheidenden Bedingungen

$$(14) \quad \left(a_2 - \frac{3}{8} a_3^2 \right)^2 \geq 4 \left\{ a_0 - \frac{a_1}{4} \left[a_1 - \frac{a_3}{4} \left(a_2 - \frac{3}{16} a_3^2 \right) \right] \right\} \begin{cases} \text{A: } = \\ \text{B: } > \\ \text{C: } < \end{cases},$$

oder etwas umgeformt

$$(14a) \quad \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right)^2 + a_3 \left[a_1 - \frac{a_3}{2} \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right) \right] \geq 4 a_0 \begin{cases} \text{A: } = \\ \text{B: } > \\ \text{C: } < \end{cases}.$$

Die in (14) bzw. (14a) enthaltenen Ungleichungen lassen sich, was für die Rechnung bequemer ist, in Gleichungen verwandeln und in dieser Form mit der ebenfalls in (14) enthaltenen Gleichung zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen, indem man einen Koeffizienten x einführt, dessen Wert zwischen 0 und $+\infty$ liegt und durch die Gleichung selbst bestimmt wird. Man kann nämlich statt (14a) schreiben

$$(14b) \quad \begin{cases} 4 x^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right)^2 \\ + a_3 \left[a_1 - \frac{a_3}{2} \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right) \right] \end{cases} \begin{cases} \text{Fall A: } x = 1 \\ \text{Fall B: } x > 1 \\ \text{Fall C: } x < 1 \end{cases}.$$

Es entspricht also $x = 1$ dem Fall A, $x > 1$ dem Fall B, $x < 1$ dem Fall C.

Diese Gleichung geht mit Rücksicht auf die gemeinsame Bedingung (13) über in

$$(15) \quad 4 x^2 a_0 = \left(a_2 - \frac{a_3^2}{4} \right)^2, \text{ d. h. } 2 x \sqrt{a_0} = a_2 - \frac{a_3^2}{4}.$$

Hierdurch ist — immer die Geltung der gemeinsamen Bedingung (13) vorausgesetzt — der Wert des Koeffizienten x in jedem Falle sehr einfach bestimmt. Man kann Gleichung (15) durch nochmalige Zuziehung von (13) auch umformen in

$$(16) \quad x^2 a_0 = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Die beiden Gleichungen (15) und (16) können natürlich die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (13) und (14) ersetzen.

Durch Einführung von x gehen die Werte a , b , c von Gleichung (5) über in

$$(17) \quad \begin{cases} a = 2x\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{8} \\ b = 0 \\ c = \sqrt{a_0}\left(\sqrt{a_0} - x\frac{a_1^3}{8}\right) + \frac{a_2^4}{256}. \end{cases}$$

Die Differenz $a^2 - 4c$ wird

$$(18) \quad a^2 - 4c = 4a_0(x^2 - 1).$$

Aus dieser Gleichung folgt die in (14b) vorweg angegebene Zuordnung der verschiedenen Wertebereiche von x zu den drei Fällen A, B, C.

Durch Einführung von x erhält man die allgemeine Lösung (9) der reduzierten Gleichung (4a) und die aus ihr hervorgehenden Spezialfälle (12a), (12b), (12c) in der Form

$$(19) \quad \zeta' = \pm \sqrt{-x\sqrt{a_0} + \frac{a_1^3}{16} \pm \sqrt{a_0}(x^2 - 1)},$$

also für Fall A mit $a^2 - 4c = 0$, d. h. $x = 1$:

$$(20a) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_2 = +i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16}}, \\ \zeta_3 = \zeta_4 = -i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16}}; \end{cases}$$

für Fall B mit $a^2 - 4c > 0$, d. h. $x > 1$:

$$(20b) \quad \begin{cases} \zeta_1 = +i\sqrt{x\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16} - \sqrt{a_0}(x^2 - 1)}, \\ \zeta_2 = +i\sqrt{x\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16} + \sqrt{a_0}(x^2 - 1)}, \\ \zeta_3 = -i\sqrt{x\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16} - \sqrt{a_0}(x^2 - 1)}, \\ \zeta_4 = -i\sqrt{x\sqrt{a_0} - \frac{a_1^3}{16} + \sqrt{a_0}(x^2 - 1)}, \end{cases}$$

für Fall C mit $a^2 - 4c < 0$, d. h. $x < 1$:

$$(20c) \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 \\ \zeta_3 \end{aligned} \right\} &= + \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{a_0 - \frac{a_3^2}{8}} x \sqrt{a_0} + \frac{a_3^4}{256} - \left(2x \sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{8} \right)} \\ &\quad \pm \frac{i}{2} \sqrt{2 \sqrt{a_0 - \frac{a_3^2}{8}} x \sqrt{a_0} + \frac{a_3^4}{256} + \left(2x \sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{8} \right)}, \\ \zeta_2 \\ \zeta_4 \end{aligned} \right\} &= - \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{a_0 - \frac{a_3^2}{8}} x \sqrt{a_0} + \frac{a_3^4}{256} - \left(2x \sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{8} \right)} \\ &\quad \pm \frac{i}{2} \sqrt{2 \sqrt{a_0 - \frac{a_3^2}{8}} x \sqrt{a_0} + \frac{a_3^4}{256} + \left(2x \sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{8} \right)}.$$

Durch Hinzufügung von $-a_3/4$ erhält man hieraus die Wurzeln

$$\zeta = -\frac{a_3}{4} + \zeta'$$

selber.

Wie aus (17) ersichtlich ist und nochmals hervorgehoben werden möge, gelten alle diese Beziehungen nur für den Fall der Reduzierbarkeit der biquadratischen Gleichung (1) auf eine quadratische, was durch die Bedingung $b = 0$ ausgedrückt wird.

Es mögen hier gleich noch einige Beziehungen mit angeführt werden, die im folgenden physikalischen Teil von Bedeutung sind. Aus physikalischen Gründen kommen nur Gleichungen in Betracht, bei denen die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 alle *reell und positiv* sind, bei denen weiter auch die Koeffizienten a und c der zur quadratischen ausgearteten reduzierten Gleichung *positiv* (und reell) sind, und bei denen schließlich noch die reellen Teile der Wurzeln ζ *negativ* sind. Diese Bedingungen erfordern, daß

$$(21) \left\{ \begin{aligned} &\text{im Fall A} \\ &\quad \sqrt{a_0} \geq \frac{a_3^2}{16}, \\ &\text{im Fall B} \\ &\quad x \sqrt{a_0} \geq \frac{a_3^2}{16} + \sqrt{a_0(x^2 - 1)}, \\ &\text{im Fall C} \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{a_0 - \frac{a_3^2}{8}} x \sqrt{a_0} + \frac{a_3^4}{256} - \frac{1}{4} \left(2x \sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{8} \right) \geq \frac{a_3^2}{16} \end{aligned} \right.$$

sein muß.

Zweiter Teil.

§ 4. Die Bewegungsgleichungen gekoppelter Systeme.

Für zwei schwingungsfähige Systeme, die im freien Zustand, also ungekoppelt und unbeeinflusst durch irgendwelche äußere periodische Kraft, exponentiell gedämpfte Sinusschwingungen ausführen, gelten die Differentialgleichungen der Bewegung in folgender allgemeiner Form

$$(22) \quad \begin{cases} a_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -c_{11} x_1 - b_{11} \frac{dx_1}{dt}, \\ a_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -c_{22} x_2 - b_{22} \frac{dx_2}{dt}. \end{cases}$$

Hier bedeutet t die Zeit, x_1 die schwingende Koordinate des Systems 1 (z. B. Elongation aus der Ruhelage, elektrische Stromstärke oder Spannung u. dgl.); a_{11} , b_{11} , c_{11} sind zugehörige Konstante (z. B. bei einem schwingenden Massenpunkt die Masse a_{11} , rücktreibende Direktionskraft c_{11} , Dämpfungskonstante b_{11}); $-c_{11} x_1$ ist die der Elongation aus der Ruhelage proportionale rücktreibende Kraft, $-b_{11} \frac{dx_1}{dt}$ die der augen-

blicklichen Geschwindigkeit proportionale dämpfende Kraft. Das Analoge gilt für die Größen mit dem Doppelindex 22.

Werden die beiden Systeme miteinander gekoppelt, so treten noch die Koppelungsglieder rechts hinzu, d. h. Kräfte, welche infolge der Koppelung von dem zweiten System auf das erste und ebenso rückwärts von dem ersten auf das zweite ausgeübt werden. Die Koeffizienten dieser Glieder sollen durch Doppelindizes mit zwei verschiedenen Zahlen bezeichnet werden. Es sind dreierlei Kräfte möglich, nämlich eine Kraft, die der augenblicklichen Beschleunigung des anderen Systems proportional ist, eine, die seiner Geschwindigkeit und eine, die seiner Lage (Koordinate) proportional ist. Man kann danach drei Arten der Koppelung unterscheiden: *Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Lagekoppelung*. Da von der Geschwindigkeit die dämpfende Kraft (bei mechanischen Systemen die Reibung), von der Lage die rücktreibende Kraft abhängt, so unterscheidet man diese drei Koppelungsarten nach dem Vorgang von M. Wien meist als Beschleunigungs-, Reibungs- und Kraftkoppelung. Bei elektromagnetischen Schwingungskreisen entsprechen ihnen in derselben Reihenfolge die magnetische

(induktive), die galvanische (konduktive) und die elektrostatische (kapazitive) Koppelung.

Fügt man diese Koppelungsglieder rechts hinzu und bringt alle Glieder von rechts nach links, so werden die beiden gleichzeitig zu erfüllenden Bewegungsgleichungen

$$(23) \quad \begin{cases} a_{11} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_{11} \frac{dx_1}{dt} + c_{11} x_1 + a_{12} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_{12} \frac{dx_2}{dt} + c_{12} x_2 = 0, \\ a_{22} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_{22} \frac{dx_2}{dt} + c_{22} x_2 + a_{21} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_{21} \frac{dx_1}{dt} + c_{21} x_1 = 0. \end{cases}$$

Sie lassen sich in die Form bringen

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dx_1}{dt} + n_1^2 x_1 + \varrho_1 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\delta_1 \sigma_1 \frac{dx_2}{dt} + n_1^2 \vartheta_1 x_2 = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dx_2}{dt} + n_2^2 x_2 + \varrho_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\delta_2 \sigma_2 \frac{dx_1}{dt} + n_2^2 \vartheta_2 x_1 = 0, \end{cases}$$

wenn man sie durch a_{11} bzw. a_{22} dividiert und setzt

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{b_{11}}{a_{11}} = 2\delta_1, & \frac{b_{22}}{a_{22}} = 2\delta_2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{(Dämpfungs-} \\ \text{konstanten),} \end{array} \right. \\ \frac{c_{11}}{a_{11}} = n_1^2, & \frac{c_{22}}{a_{22}} = n_2^2 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Frequenz-} \\ \text{konstanten),} \end{array} \right. \\ \frac{a_{12}}{a_{11}} = \varrho_1, & \frac{b_{12}}{a_{11}} = \sigma_1, & \frac{c_{12}}{a_{11}} = \vartheta_1 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} = \varrho_2, & \frac{b_{21}}{a_{22}} = \sigma_2, & \frac{c_{21}}{a_{22}} = \vartheta_2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{(Koppelungs-} \\ \text{konstanten),} \end{array} \right.$$

so daß

$$\frac{b_{12}}{a_{11}} = 2\delta_1 \sigma_1, \quad \frac{b_{21}}{a_{22}} = 2\delta_2 \sigma_2, \quad \frac{c_{12}}{a_{11}} = n_1^2 \vartheta_1, \quad \frac{c_{21}}{a_{22}} = n_2^2 \vartheta_2$$

wird. Die Größen δ_1 und δ_2 sind die Dämpfungen der beiden freien (ungekoppelten) Systeme, n_1 und n_2 ihre Kreisfrequenzen ohne Dämpfung; die zugehörigen Kreisfrequenzen mit Dämpfung sind bekanntlich

$$(26) \quad \nu_1 = \sqrt{n_1^2 - \delta_1^2}, \quad \nu_2 = \sqrt{n_2^2 - \delta_2^2}.$$

Die Koeffizienten $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ sind die Wienschen Koppelungskoeffizienten, und zwar beziehen sich die ϱ auf die Beschleunigungskoppelung, die σ auf die Geschwindigkeits- (Reibungs-) und die ϑ auf die Lage(Kraft-)koppelung. Diese Koeffizienten, und ebenso die Dämpfungs- und Frequenzkonstanten, hängen von den Konstanten der gekoppelten Schwingungssysteme ab, z. B. bei elektromagnetischen Kreisen

von den Koeffizienten der Selbstinduktion, der gegenseitigen Induktion, den Widerständen, Kapazitäten usw. Von den drei möglichen Koppelungsarten können eine oder auch zwei fehlen, so daß im ganzen sieben verschiedene Fälle vorkommen können: drei Fälle einfacher Koppelung, drei Fälle kombinierter Koppelung je zweier Arten und schließlich der Fall aller drei Koppelungen. Von diesen werden hier nacheinander die drei Fälle mit einfacher und ein Fall mit kombinierter Koppelung, nämlich Beschleunigungs- und Reibungskoppelung (magnetischer und galvanischer Koppelung) behandelt werden.

§ 5. Die biquadratische Säkulargleichung. Die Integration der Gleichungen (23) bzw. (24) erfolgt bekanntlich nach der Methode der Partikularintegrale durch den Ansatz

$$(27) \quad x_1 = A_1 e^{\mu t}, \quad x_2 = A_2 e^{\mu t},$$

wobei A_1 und A_2 zwei komplexe Amplituden, μ eine vorläufig unbestimmte komplexe Konstante ist, die aus der Säkulargleichung (charakteristischen Gleichung) zu berechnen ist und bei Schwingungen die Form

$$(28) \quad \mu = -\delta' \pm i\nu'$$

hat, mit negativem reellen Teil. Hierbei bedeutet δ' die resultierende Dämpfung, ν' die resultierende Kreisfrequenz einer der Koppelungsschwingungen (Hauptschwingungen), von denen soviel verschiedene möglich sind, als das Gesamtsystem Freiheitsgrade besitzt. Demgemäß ergeben sich aus der Säkulargleichung auch soviel im allgemeinen verschiedene Werte von μ — also auch von δ' und ν' —, als Freiheitsgrade vorhanden sind; sie werden im folgenden, wenn nötig, durch römische Zahlenindizes unterschieden. Unsere Aufgabe besteht darin, diejenigen Fälle aufzusuchen, in denen diese Werte entweder völlig, oder aber nur im imaginären Teil, den Frequenzen, oder nur im reellen Teil, den Dämpfungen, einander gleich werden.

Bei dem vorliegenden System mit zwei Freiheitsgraden wird die Säkulargleichung vom 4. Grade, hat also im allgemeinen vier verschiedene Wurzeln, die aber paarweis konjugiert sind, und somit zwei Frequenzen und zwei Dämpfungen ergeben. Setzt man nämlich die Werte (27) in die Differentialgleichungen (24) ein, so gehen diese nach Wegheben des

Faktors $e^{i\omega t}$ in zwei gewöhnliche Gleichungen mit den drei Unbekannten A_1, A_2, μ über. Aus ihnen läßt sich das Amplitudenverhältnis $A_2:A_1$ und die Größe μ bestimmen, und zwar ergeben sich die beiden identisch gleichen Werte dieses Quotienten

$$(29) \quad \frac{A_2}{A_1} = - \frac{\mu^2 + 2\delta_1\mu + n_1^2}{\varrho_1\mu^2 + 2\delta_1\sigma_1\mu + n_1^2\vartheta_1} = - \frac{\varrho_2\mu^2 + 2\delta_2\sigma_2\mu + n_2^2\vartheta_2}{\mu^2 + 2\delta_2\mu + n_2^2}.$$

A_1 und A_2 sowie ihr Quotient sind komplexe Größen. Für die endgültige Berechnung muß man im Schlußresultat den reellen vom imaginären Teil trennen.

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $A_2:A_1$ erhält man die *Säkulargleichung*

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mu^4 + \frac{2(\delta_1 - \varrho_2\delta_1\sigma_1 + \delta_2 - \varrho_1\delta_2\sigma_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}\mu^3 \\ &+ \frac{n_1^2 - \varrho_2n_1^2\vartheta_1 + 4\delta_1\delta_2 - 4\delta_1\delta_2\sigma_1\sigma_2 + n_2^2 - \varrho_1n_2^2\vartheta_2}{1 - \varrho_1\varrho_2}\mu^2 \\ &+ \frac{2(\delta_2n_1^2 - \delta_2\sigma_2n_1^2\vartheta_1 + \delta_1n_2^2 - \delta_1\sigma_1n_2^2\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}\mu \\ &+ \frac{n_1^2n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man die Koeffizienten derselben mit a_3, a_2, a_1, a_0 , so erhält man die an den Anfang dieser Abhandlung gestellte Gleichung (1), jedoch mit μ statt ζ als unbekannter Größe, nämlich

$$(31) \quad \mu^4 + a_3\mu^3 + a_2\mu^2 + a_1\mu + a_0 = 0.$$

Die im ersten Teil benutzten Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 haben also folgende, aus Gleichung (32) ersichtliche, physikalische Bedeutung

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} a_3 &= \frac{2(\delta_1 - \varrho_2\delta_1\sigma_1 + \delta_2 - \varrho_1\delta_2\sigma_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}, \\ a_2 &= \frac{n_1^2 - \varrho_2n_1^2\vartheta_1 + 4\delta_1\delta_2 - 4\delta_1\delta_2\sigma_1\sigma_2 + n_2^2 - \varrho_1n_2^2\vartheta_2}{1 - \varrho_1\varrho_2}, \\ a_1 &= \frac{2(\delta_2n_1^2 - \delta_2\sigma_2n_1^2\vartheta_1 + \delta_1n_2^2 - \delta_1\sigma_1n_2^2\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}, \\ a_0 &= \frac{n_1^2n_2^2(1 - \vartheta_1\vartheta_2)}{1 - \varrho_1\varrho_2}. \end{aligned} \right.$$

Sie setzen sich in ganz bestimmter Weise aus den Frequenzen und Dämpfungen der freien Systeme sowie den Koppelungskoeffizienten zusammen.

Führt man diese Werte der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 in die Gleichungen (13) und (14) bzw. in (15) und (16) des ersten Teiles ein, so erhält man gewisse Gleichungen (bzw. Ungleichungen) zwischen den freien Frequenzen, Dämpfungen und den Koppelungskoeffizienten, die erfüllt sein müssen, damit die gesuchte Erscheinung, nämlich das Zusammenfallen der beiden resultierenden Frequenzen und Dämpfungen in je einen einzigen Wert, eintritt. Diese Gleichungen sollen nun für die verschiedenen Koppelungsarten aufgestellt und die daraus sich ergebenden Folgerungen weiter untersucht werden. Es werden folgende Koppelungsarten behandelt werden:

- I. nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung,
- II. nur elektrostatische oder Kraftkoppelung,
- III. nur galvanische oder Reibungskoppelung,
- IV. gleichzeitig magnetische und galvanische (Beschleunigungs- und Reibungskoppelung)

vorhanden. Bei jeder Nummer werden die drei Unterfälle A, B, C nach der Bezeichnung des ersten Teiles unterschieden, wobei A das Gleichwerden von Frequenz und Dämpfung, B das Gleichwerden der Dämpfungen, C das Gleichwerden der Frequenzen bedeutet. Diesen drei Fällen entsprechen die Werte $\kappa = 1$, $\kappa > 1$, $\kappa < 1$ eines gewissen durch Gleichung (16) definierten Koeffizienten κ . Es ist zweckmäßig, noch zwei neue Koeffizienten einzuführen, nämlich das Verhältnis der Dämpfungen s und der (ungedämpften) Eigenfrequenzen der beiden ungekoppelten Teilsysteme h .

$$(33) \quad s = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad \text{und} \quad h = \frac{n_2}{n_1}.$$

Diese können alle Werte zwischen 0 und $+\infty$ haben.

- I. Nur magnetische oder Beschleunigungskoppelung vorhanden.

§ 6. Die Bedingungsgleichungen bei Beschleunigungskoppelung. Hier sind die Koppelungskoeffizienten

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0; \quad \varrho_1 \neq 0, \quad \varrho_2 \neq 0.$$

Demnach werden die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 [vgl. (32)]

$$(34) \quad \begin{cases} a_3 = \frac{2(\delta_1 + \delta_2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2}, \\ a_2 = \frac{n_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 + n_2^2}{1 - \varrho_1 \varrho_2}, \\ a_1 = \frac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2}, \\ a_0 = \frac{n_1^2 n_2^2}{1 - \varrho_1 \varrho_2}. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen (15) und (16) werden

$$(35) \quad x \frac{2n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} = \frac{n_1^2 + 4\delta_1 \delta_2 + n_2^2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} - \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{(1 - \varrho_1 \varrho_2)^2},$$

$$(36) \quad x \frac{2(\delta_1 + \delta_2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \cdot \frac{n_1 n_2}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}} = \frac{2(\delta_1 n_2^2 + \delta_2 n_1^2)}{1 - \varrho_1 \varrho_2}.$$

Hebt man in (36) den Nenner $1 - \varrho_1 \varrho_2$ beiderseits weg und benutzt die Koeffizienten ε und h nach Gleichung (33), so gehen diese Gleichungen mit etwas anderer Anordnung der Glieder über in

$$(35a) \quad 1 + 4\varepsilon \frac{\delta_1^2}{n_1^2} + h^2 = 2xh\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2} + \frac{(1 + \varepsilon)^2}{1 - \varrho_1 \varrho_2} \frac{\delta_1^2}{n_1^2},$$

$$(36a) \quad h^2 + \varepsilon = \frac{xh(1 + \varepsilon)}{\sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2}}.$$

Aus (36a) folgt

$$(37) \quad \sqrt{1 - \varrho_1 \varrho_2} = \frac{xh(1 + \varepsilon)}{h^2 + \varepsilon},$$

also die bei einfacher Koppelung meist schlechthin als Koppelungsparameter oder Koppelungskoeffizient K bezeichnete Größe

$$(38) \quad K = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = \sqrt{1 - \frac{x^2 h^2 (1 + \varepsilon)^2}{(h^2 + \varepsilon)^2}} = \frac{\sqrt{(h^2 + \varepsilon)^2 - x^2 h^2 (1 + \varepsilon)^2}}{h^2 + \varepsilon}.$$

Mit diesem Wert von $\varrho_1 \varrho_2$ wird die Gleichung (35a) zu

$$1 + 4\varepsilon \frac{\delta_1^2}{n_1^2} + h^2 = 2xh \frac{xh(1 + \varepsilon)}{h^2 + \varepsilon} + \frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{x^2 h^2} \frac{\delta_1^2}{n_1^2}.$$

Aus ihr ergibt sich schließlich für die Dämpfung δ_1 des freien Systems 1 als notwendig einzuhaltender Wert

$$(39) \quad \frac{\delta_1^2}{n_1^2} = \frac{h^2 + 1 - \frac{2x^2 h^2 (1 + \varepsilon)}{h^2 + \varepsilon}}{\frac{(h^2 + \varepsilon)^2}{x^2 h^2} - 4\varepsilon}.$$

Das in den Gleichungen (37) bzw. (38) und (39) enthaltene Resultat besagt folgendes: Damit einer der Fälle A, B, C ein-

treten kann, müssen die — zunächst ganz willkürlich wählbaren — charakteristischen Größen der beiden freien Systeme $n_1, \delta_1, n_2, \delta_2$, in der durch (39) angegebenen festen Beziehung zueinander stehen. Ergibt diese Gleichung, nach κ aufgelöst, für κ den Wert 1, so tritt der Fall A (Gleichheit der Frequenzen und Dämpfungen) ein; ergibt sich $\kappa > 1$, so tritt Fall B (Gleichheit der Dämpfungen) ein; ergibt sich $\kappa < 1$, so tritt Fall C (Gleichheit der Frequenzen) ein. In jedem Fall muß aber dazu noch der Koppelungskoeffizient K den durch (38) bestimmten Wert annehmen. Diese Gleichung (38) hat übrigens zur Folge, daß von allen denkbaren Wertetripeln $h, \varepsilon, \delta_1/n_1$ nur diejenigen zulässig sind, für welche K reell, also $(h^2 + \varepsilon)^2 - \kappa^2 h^2 (1 + \varepsilon)^2 > 0$ ist, wenn man den aus (39) berechneten Wert κ darin einsetzt.

Der Fall A mit $\kappa = 1$ stellt den Übergang zwischen B und C dar; er ist ein Spezialfall, der nur für ein bestimmtes ziemlich eng begrenztes Gebiet der Wertetripel $h, \varepsilon, \delta_1/n_1$ erfüllt wird. Bei der geringsten Abweichung geht er in den Fall B oder C über. Diese sind durch Wertetripel erfüllbar, für welche ein viel größerer Spielraum vorhanden ist. In welchen Gebieten diese Tripel liegen, erkennt man am besten an dem Fall A, der leicht durchzurechnen ist. Man erhält dabei ohne weiteres auch den zugehörigen Wert des Koppelungskoeffizienten K und die Werte der Koppelungsfrequenzen und -dämpfungen ν' und δ' . Es soll deshalb zuerst der Unterfall IA behandelt werden.

§ 7. Der Unterfall IA.

Gleiche Frequenzen und Dämpfungen der beiden Koppelungsschwingungen bei Beschleunigungskoppelung.

Wegen $\kappa = 1$ wird nach einfacher Umformung

$$(40) \quad \sqrt{1 - (\varrho_1 \varrho_2)_A} = \frac{h(1 + \varepsilon)}{h^2 + \varepsilon},$$

$$(41) \quad K_A = \sqrt{(\varrho_1 \varrho_2)_A} = \sqrt{1 - \frac{h^2(1 + \varepsilon)^2}{(h^2 + \varepsilon)^2}} = \frac{\sqrt{(h^2 - 1)(h^2 - \varepsilon^2)}}{h^2 + \varepsilon},$$

$$(42) \quad \frac{\delta_1^2}{n_1^2} = \frac{(h^2 - 1) h^2}{(h^2 + \varepsilon)(h^2 - \varepsilon)}.$$

Mit Benutzung dieser Werte ergeben sich die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der biquadratischen Gleichung, indem man in (34) einsetzt

$$(43) \quad \begin{cases} a_3 = 2h(1+\varepsilon) \frac{\sqrt{h^2-1}}{\sqrt{h^4-\varepsilon^2}} \frac{(h^2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2 h^2} n_1, \\ a_2 = \left(h^2 + 1 + 4\varepsilon \frac{(h^2-1)h^2}{(h^4-\varepsilon^2)} \right) \frac{(h^2+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2 h^2} n_1^2, \\ a_1 = 2h \frac{\sqrt{h^2-1}}{\sqrt{h^4-\varepsilon^2}} \frac{(h^2+\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^2 h^3} n_1^3, \\ a_0 = \frac{(h^2+\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3} n_1^4. \end{cases}$$

Hiermit erhält man schließlich die Wurzeln μ und damit Frequenz und Dämpfung der Koppelungsschwingungen, indem man die Gleichungen (20a) des ersten Teiles benutzt und ζ durch μ ersetzt,

$$(44) \quad \begin{cases} \mu_I = \mu_{III} = -\frac{a_3}{4} + i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{16}}, \\ \mu_{II} = \mu_{IV} = -\frac{a_3}{4} - i\sqrt{\sqrt{a_0} - \frac{a_3^2}{16}}, \end{cases}$$

also

$$(44a) \quad \mu_I = \mu_{III} = -\delta'_A + i\nu'_A, \quad \mu_{II} = \mu_{IV} = -\delta'_A - i\nu'_A,$$

wobei

$$(45) \quad \begin{cases} \delta'_A = n_1 \frac{h^2+\varepsilon}{2h(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{(h^2-1)(h^2+\varepsilon)}{h^3-\varepsilon}}, \\ \nu'_A = \frac{n_1}{2h(1+\varepsilon)} \sqrt{\frac{(h^2+\varepsilon)[4h^2(h^2-\varepsilon)(1+\varepsilon) - (h^2-1)(h^2+\varepsilon)^2]}{h^3-\varepsilon}} \end{cases}$$

die resultierende Dämpfung und Frequenz des einwelligen und einfach gedämpften Koppelungssystems darstellen.

Mittels der Formeln (41), (42) und (45) sind die Werte der Tab. I berechnet. Außer den zur Erfüllung des Falles A nötigen Frequenzen und Dämpfungen der freien Systeme (unterstrichene Größen) nebst dem zugehörigen Koppelungsparameter K enthält sie die resultierenden Frequenzen und Dämpfungen des gekoppelten Systems (gestrichene Größen). Ferner sind neben den Dämpfungen δ zum Teil auch die logarithmischen Dekremente

$$(46) \quad b_1 = \frac{2\pi\delta_1}{\nu_1}, \quad b_2 = \frac{2\pi\delta_2}{\nu_2} \quad \text{und} \quad b' = \frac{2\pi\delta'}{\nu'}$$

angegeben. Die Quotienten $h = n_2/n_1$ und $\varepsilon = \delta_2/\delta_1$, die man willkürlich wählen kann, sind als gegeben angenommen, und zwar entspricht jeder der horizontalen Abteilungen der Tabelle

Tabelle I.

	$h = \frac{n_2}{n_1}$	K	$\frac{\delta_1}{n_1}$	$\frac{\delta_2}{n_1}$	b_1	b_2	$\frac{v_1}{n_1}$	$\frac{v_2}{n_1}$	$\frac{\delta'}{n_1}$	δ'	$\frac{v'}{n_1}$
8 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,5	0,8660	0	0,4330	0	10,8828	1	0,25000	0,8661	10,8828	0,50000
	0,833	0,5528	0	0,4606	0	4,1678	1	0,69444	0,8317	2,2089	0,94340
	0,9	0,4359	0	0,3924	0	3,0431	1	0,81000	0,2421	1,5882	0,9702
	0,98	0,1971	0	0,1932	0	1,2629	1	0,96117	0,1005	0,6346	0,99494
	0,99	0,1404	0	0,1390	0	0,8908	1	0,98080	0,0716	0,4465	0,99748
	0,998	0,0632	0	0,0630	0	0,3976	1	0,99601	0,0316	0,1989	0,99950
10 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,999	0,0447	0	0,0446	0	0,2811	1	0,99800	0,0224	0,1406	0,99975
	0,9999	0,0141	0	0,01414	0	0,0889	1	0,99980	0,00707	0,0444	0,99998
	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	0,5	0,9488	0,0422	0,4219	0,2724	10,8964	0,99906	0,24977	0,8274	10,4560	0,49720
	0,833	0,5151	0,0462	0,4618	0,2904	4,1822	0,99898	0,69370	0,3457	2,8520	0,92343
	0,98	0,1789	0,0194	0,1941	0,1220	1,2690	0,99981	0,96099	0,1103	0,6984	0,99222
20 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,998	0,0571	0,0063	0,0635	0,0399	0,4004	0,99998	0,99598	0,0350	0,2198	0,99921
	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	0,5	0,7454	0,2185	0,4369					0,7365		0,45562
	0,833	0,3730	0,2456	0,4912					0,4279		0,84559
	0,909	0,2626	0,2079	0,4159					0,3350		0,91099
	0,98	0,1160	0,1101	0,2203					0,1642		0,96009
1010 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,99	0,0818	0,0797	0,1594					0,1192		0,97962
	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	0,5	0,6032	0,4424	0,4469					0,6990		0,37184
	0,833	0,1851	0,6280	0,6343					0,6536		0,64873
	0,98	0,0243	0,6320	0,6283					0,6256		0,76770
	0,998	0,0049	0,3749	0,3787					0,3768		0,92528
1	0,999	0,0000	0,0000	0,0000					0,6817		0,63905
	0,9999	0,0000	0,0000	0,0000					0,6817		0,63905

0,883	0,1851	0,6280	0,6343	0,6536	0,64873
0,98	0,0243	0,6220	0,6253	0,6770	0,76770
0,993	0,0049	0,3749	0,3757	0,3768	0,92623
0,99	0,0000	0,3752	0,3752	0,3752	0,92623
0,983	0,1808	0,640	0,640	0,6617	0,6398
0,98	0,0198	0,7001	0,7001	0,7004	0,7001
1	0	bis 0,707	bis 0,707	0,707 bis 1	0,707 bis 1
1,02	0,0198	0,7141	0,7141	0,7144	0,7141
1,2	0,1803	0,768	0,768	0,794	0,7678
2	0,6000	0,8944	0,8944	1,3975	0,7395
1	0	0	0	0	1
1,002	0,0049	0,3794	0,3756	0,3775	0,92708
1,02	0,0243	0,6409	0,6345	0,6381	0,78306
1,2	0,1851	0,7612	0,7536	0,7843	0,77847
2	0,6032	0,8938	0,8849	1,3980	0,74868
1	0	0	0	0	1
1,01	0,0818	0,1610	0,0805	0,1204	0,86941
1,02	0,1160	0,2247	0,1123	0,1675	0,97929
1,1	0,2626	0,4575	0,2287	0,3685	1,00209
1,2	0,3730	0,5894	0,2947	0,5135	1,01470
2	0,7454	0,8739	0,4369	1,4730	0,91124
1	0	0	0	0	1
1,002	0,0571	0,0636	0,00636	0,0850	1,00121
1,02	0,1789	0,1980	0,0198	0,1125	1,01207
1,2	0,5151	0,5541	0,0554	0,4148	1,10812
2	0,8438	0,8663	0,0866	1,6548	0,99440
1	0	0	0	0	1
1,0001	0,0141	0,0141	0,0889	0,00707	1,00008
1,001	0,0447	0,0447	0,2811	0,0224	1,00075
1,002	0,0632	0,0632	0,3976	0,0317	1,00150
1,01	0,1404	0,1404	0,8908	0,0716	1,00746
1,02	0,1971	0,1971	1,2629	0,1025	1,01482
1,111	0,4358	0,4358	3,0431	0,2691	1,0780
1,2	0,5528	0,5528	4,1678	0,3980	1,1321
2	0,8660	0,8660	10,8628	1,7321	1,0000

ein gewisser Wert von ε , nämlich $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,5$, $\varepsilon = 0,99$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1,01$, $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 10$, $\varepsilon = \infty$. Der erste Fall bedeutet, daß die Dämpfung des freien Systems 2 verschwindend klein gegen die von System 1 ist; der zweite, daß sie nur $1/10$ derjenigen von 1 ist usw.; im Falle $\varepsilon = 1$ sind beide Systeme gleich stark gedämpft. Die Werte $\varepsilon = 0,99$ und $1,01$ gelten für nahezu gleich stark gedämpfte Systeme (Unterschied 1 Proz.). In jeder dieser fünf selbständigen Abteilungen sind untereinander die Werte verzeichnet, die verschiedenen

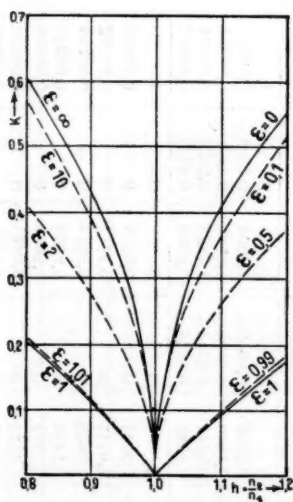
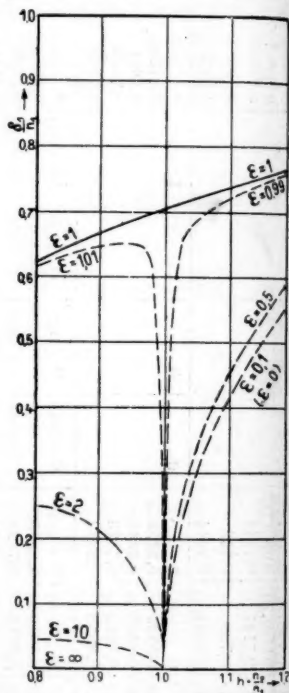
Koppelungsparameter K .

Fig. 1.

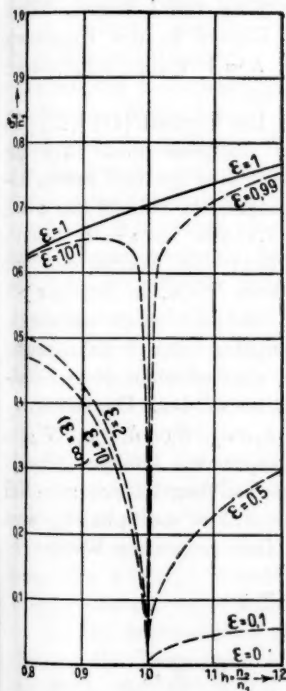


Dämpfung des freien Systems 1.

Fig. 2.

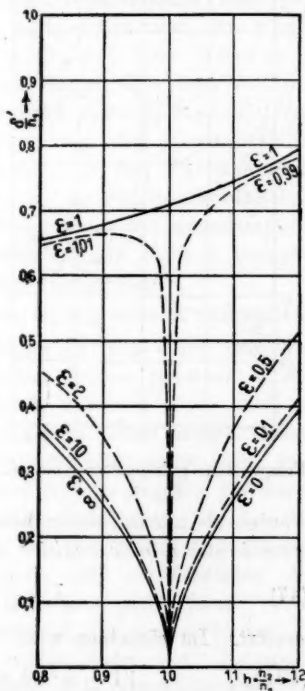
Verstimmungen beider freien Systeme gegeneinander entsprechen; der Wert $h = 1$ bedeutet den Resonanzfall (Einklang der ungedämpften Frequenzen beider Systeme). Die Verstimmung ist bis zu dem praktisch natürlich längst nicht mehr in Betracht kommenden hohen Wert von 2 bzw. 0,5 aufwärts geführt, um einen Überblick über das allgemeine Verhalten

der verschiedenen Größen K , δ usw. in weiterem Umfange zu gewinnen. Wirklich in Betracht kommen ja nur Verstimmungen, die um höchstens einige Hundertel vom Einklang abweichen. Aus den Dämpfungswerten δ bzw. den Dekrementen b der Tab. I folgt sogar, daß hier die Verstimmung selbst im günstigsten Falle $\varepsilon = 0$ höchstens 1 bis 2 Tausendstel betragen darf, weil sonst die notwendige Dämpfung extrem stark wird.



Dämpfung des freien Systems 2.

Fig. 3.

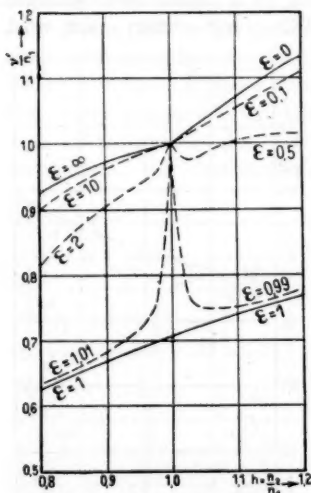


Dämpfung des gekoppelten Systems.

Fig. 4.

Der Gang der verschiedenen Größen K , δ_1 , δ_2 , δ' , ν' ergibt sich aus den Figg. 1—5, die nach den Tabellenwerten konstruiert sind. In der unmittelbaren Umgebung der Resonanzstelle ändern sich diese Größen annähernd linear mit der Verstimmung, aber zum Teil sehr schnell; in größerer Ferne

ist der Verlauf komplizierter. Praktisch brauchbar sind wieder nur gewisse Fälle, nämlich diejenigen, bei denen die Änderungen mit der Verstimmung nicht zu rasch erfolgen, sonst wird der Zustand labil. Daraus folgt z. B., daß zur Verwirklichung des Falles I A nur Systeme mit ziemlich verschiedenen Dämpfungen



Frequenz des gekoppelten Systems.

Fig. 5.

werden sie nur mit einem bekannten Faktor multipliziert, wenn man h und ε beide zugleich durch ihre reziproken Werte

$$(47) \quad \bar{h} = \frac{1}{h}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

ersetzt. Im einzelnen wird

$$(40a) \quad \sqrt{1 - K_A^2(\bar{h}, \bar{\varepsilon})} = \sqrt{1 - K_A^2(h, \varepsilon)},$$

$$(41a) \quad K_A(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = K_A(h, \varepsilon),$$

$$(42a) \quad \delta_{1A}(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \delta_{1A}(h, \varepsilon) \cdot \frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{h} \delta_{2A}(h, \varepsilon),$$

$$(42b) \quad \delta_{2A}(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon} \cdot \delta_{1A}(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{h} \delta_{1A}(h, \varepsilon),$$

$$(42c) \quad v_{1A}(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{v_{2A}(h, \varepsilon)}{h}, \quad v_{2A}(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{v_{1A}(h, \varepsilon)}{h},$$

gekoppelt werden dürfen, denn für alle Werte von ε , die in der Nähe von 1 liegen, haben die Kurven in der Umgebung von $h = 1$ einen sehr steilen Verlauf.

Die Formeln (41), (42), (45) sind übrigens direkt nur zur Berechnung der fünf ersten Abteilungen der Tabelle (für $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0,1$ usw. bis $\varepsilon = 1$) benutzt worden; die Werte der vier anderen Teile, in denen $\varepsilon > 1$ ist, sind aus jenen auf Grund bekannter Reziprozitätsgesetze der algebraischen Formen abgeleitet worden. Die Größen a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , K_A , δ_{1A}/n_1 , δ'_{1A}/n_1 , v'_{1A}/n_1 usw. bleiben nämlich zum Teil ungeändert, zum Teil

$$(43a) \quad \begin{cases} a_3(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{a_3(h, \varepsilon)}{\bar{h}}, & a_2(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{a_2(h, \varepsilon)}{\bar{h}^2}, \\ a_1(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{a_1(h, \varepsilon)}{\bar{h}^3}, & a_0(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{a_0(h, \varepsilon)}{\bar{h}^4}, \end{cases}$$

$$(45a) \quad \delta'_A(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{\delta'_A(h, \varepsilon)}{\bar{h}}, \quad \nu'_A(\bar{h}, \bar{\varepsilon}) = \frac{\nu'_A(h, \varepsilon)}{\bar{h}}.$$

Um also z. B. den Wert von δ'_A für $\bar{\varepsilon} = 10$ und $\bar{h} = 0,998$ zu finden, braucht man nur den in Tab. I enthaltenen Wert von δ'_A für $\varepsilon = 0,1$ und $h = 1,002$ zu nehmen und ihn durch $h = 1,002$ zu dividieren. Man erhält auf diese Weise ohne umständliche Rechnung viele neue Werte, allerdings sind die zugehörigen Werte h nicht immer ganz bequeme runde Zahlen, wenigstens in größerer Entfernung von der Resonanzstelle. Alle Frequenz- und Dämpfungswerte in den Tabellen (und ebenso die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 der biquadratischen Gleichung) sind dabei auf die Frequenz n_1 der ungedämpften freien Eigenschwingung des Systems 1 als Einheit bezogen und somit unmittelbar miteinander vergleichbar.

Aus den Tabellen und Kurven ist folgendes zu entnehmen:

1. Zur Verwirklichung des Falles IA (und weiter auch der Fälle IB und IC) kommen nur solche Systeme praktisch in Betracht, deren Dämpfungen δ_1 und δ_2 sehr verschieden sind, so daß sich ε wesentlich von 1 unterscheidet. Denn nur für solche Systeme ergeben sich Koppelungen, die nicht allzu klein, und Dämpfungen, die nicht zu groß sind (vgl. die Tabellen für $\varepsilon = 0$ und 0,1 bzw. $\varepsilon = 10$ und ∞). Die Zahlenwerte für $\varepsilon = 0,1$ stimmen übrigens mit denen für $\varepsilon = 0$ (und die für $\varepsilon = 10$ mit denen für $\varepsilon = \infty$) so nahe überein, daß ein Verhältnis der Dämpfungen von 10 : 1 schon als sehr groß gelten kann.

2. Die anzuwendende Koppelung K_A ist um so kleiner, je geringer die Verstimmung h der beiden Systeme ist. Sie strebt dem Werte Null zu, der bei Einklang ($h = 1$) erreicht wird.

3. Die anzuwendende Koppelung K_A ist bei gleicher Verstimmung h um so größer, je mehr die Dämpfungen δ_1 und δ_2 sich voneinander unterscheiden.

4. Bei geringen Verstimmungen — von einigen Tausendsteln und weniger Differenz der Schwingungszahlen n_1 und n_2 — ist der Koppelungsparameter K_A sehr klein. In dem günstigsten Fall sehr verschiedener Dämpfungen ist er von der Größenordnung

0,05, d. h. also 5 Proz. des überhaupt möglichen Maximalwertes, wenn die Verstimmung 1—2 Tausendstel beträgt.

5. Nur bei sehr schwachen Verstimmungen (von höchstens einigen Tausendsteln) sind die anzuwendenden Dämpfungen klein genug, um länger anhaltende brauchbare Schwingungen zu ergeben, d. h. Schwingungen, deren logarithmisches Dekrement höchstens gleich 0,2 ist. Das wirklich brauchbare Gebiet drängt sich also auf die nächste Umgebung der Resonanzstelle zusammen.

Damit überhaupt Schwingungen und nicht aperiodische Bewegungen stattfinden, muß nach der zu Gleichung (21) führenden Bemerkung im Fall A $\sqrt{a_0} \geq a_3^2/16$ sein. Durch Einsetzen der Werte a_0 und a_3 aus (43) ergibt diese Gleichung als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit von Schwingungen

$$(48) \quad \frac{h^2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} n_1^2 \geq \frac{(h^2 - 1)(h^2 + \varepsilon)^2}{4(h^2 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^2 h^2} n_1^2,$$

oder etwas umgeformt

$$(48a) \quad 1 \geq \frac{(h^2 - 1)(h^2 + \varepsilon)^2}{4(h^2 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)h^2},$$

oder schließlich

$$(48b) \quad 4h^2(h^2 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) - (h^2 - 1)(h^2 + \varepsilon)^2 \geq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt bereits für den Übergang in den aperiodischen Zustand und liefert somit die Gleichung zur Bestimmung der Grenzwerte oder besser Übergangswerte der Verstimmung h_e , die bei gegebenem Dämpfungsverhältnis ε noch zulässig sind. Diese Gleichung ist natürlich auch unmittelbar aus (45) zu erhalten, indem man daselbst $\nu' = 0$ setzt.

Gleichung (48) ist eine kubische Gleichung¹⁾ für h_e^2 . Sie allgemein aufzulösen ist überflüssig. Es genügt, sie für einige Werte von ε aufzulösen, für die sie sich noch weiter vereinfacht. Sie reduziert sich nämlich für $\varepsilon = 0$ auf eine lineare, für $\varepsilon = 1$ auf eine quadratische Gleichung. Im ersten Fall ($\varepsilon = 0$) erhält man durch Auflösung der vereinfachten Gleichung als Übergangswert, bei dem die Schwingungen in aperiodische Bewegung übergehen,

$$h_e = \sqrt{5} = 2,236;$$

im zweiten Fall ($\varepsilon = 1$) erhält man die beiden Übergangswerte

$$h_e = \sqrt{2} \pm 1, \text{ also } 2,414 \text{ und } 0,414.$$

¹⁾ Dabei ist das Gleichheitszeichen benutzt und h_e statt h gesetzt.

Die beiden anderen Wurzeln ($h_e = 0$) im ersten und die dritte Wurzel $h_e = 1$ im zweiten Fall kommen nicht in Betracht. Die angegebenen, als Übergangswerte bezeichneten Wurzeln h_e liegen aber auch schon so weit von der Resonanz entfernt, daß alle praktisch vorkommenden Verstimmungen ganz innerhalb der durch sie gezogenen Grenzen liegen. Man hat es daher unter den der Berechnung zugrunde gelegten Verhältnissen sicher mit Schwingungen und nicht mit aperiodischen Bewegungen zu tun. Für andere Werte ε , die zwischen 0 und 1 liegen, erhält man Übergangswerte h_e zwischen 2,236 und 2,414 bzw. zwischen 0 und 0,414, also auch weit jenseits aller praktisch in Betracht kommenden Werte der Verstimmung.

Für $\varepsilon = \infty$ ergibt sich ganz ebenso als Übergangswert

$$h_e = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,447.$$

§ 8. Die Unterfälle IB und IC.

Nach dem Sonderfall IA der gleichen Frequenz und Dämpfung sind nun die Unterfälle IB (nur gleiche Dämpfungen) und IC (nur gleiche Frequenzen) zu behandeln. Sie sind im wesentlichen schon durch die bisherigen Rechnungen erledigt. Die Gleichungen (37), (38), (39) enthalten alles Nötige.

a) Die Koppelung. Es ergibt sich aus Gleichung (38) ohne weiteres: Ist $\kappa > 1$ (Fall IB), so wird der zu wählende Koppelungskoeffizient $K = K_B$ kleiner als im Fall IA; ist $\kappa < 1$ (Fall IC), so wird $K = K_C$ größer als im Fall A. Das bedeutet in Worten:

Zur Verwirklichung des Falles IB (gleiche Dämpfungen, ungleiche Frequenzen) muß die Koppelung loser sein als im Fall IA, zur Verwirklichung von IC (ungleiche Dämpfungen, gleiche Frequenzen) muß sie fester sein als im Fall IA.

Dies Resultat ist übrigens in gewissem Sinne bekannt. Die Größenordnung der in Betracht kommenden Koppelungen ergibt sich aus der für den Fall IA geltenden Tab. I; sie liegen alle in der Nähe der dort verzeichneten K_A -Werte.

Ein Maß für die Änderung von K beim Übergang von Fall IC durch IA zu IB gibt die Ableitung von K nach κ . Rechnerisch bequemer ist es aber, die Ableitung von K^2 nach κ zu betrachten; aus ihr erhält man die Ableitung von K durch Division mit $2K$, denn es ist

$$\frac{dK^2}{d\kappa} = 2K \frac{dK}{d\kappa}.$$

Es wird

$$(49) \quad \frac{dK^2}{d\kappa} = - \frac{2\kappa h^2(1+\varepsilon)^2}{(h^2+\varepsilon)^2}.$$

Beim Durchgang durch den Fall IA ist $\kappa = 1$, also wird daselbst

$$(50) \quad \left(\frac{dK^2}{d\kappa} \right)_{\kappa=1} = - \frac{2h^2(1+\varepsilon)^2}{(h^2+\varepsilon)^2}.$$

Da nur die Umgebung der Resonanzstelle $h = 1$ praktisch in Betracht kommt, so kann man zur näherungsweisen Berechnung des Wertes von (50) $h = 1$ setzen, wodurch man

$$(51) \quad \left(\frac{dK^2}{d\kappa} \right)_{\substack{\kappa=1 \\ h=1}} = -2$$

erhält, unabhängig von dem Werte ε . Um

$$\left(\frac{dK}{d\kappa} \right)_{\substack{\kappa=1 \\ h=1}}$$

selbst zu erhalten, hat man dies mit den doppelten in Tab. I angegebenen Werten von K_A zu dividieren.

$\beta)$ *Die Dämpfung.* Der Gang der Dämpfung δ_1 bei Variation von κ ist nicht ohne weiteres aus Gleichung (39) zu ersehen. Bildet man aber die Ableitung von δ_1^2/n_1^2 nach κ , so ergibt sich

$$(52) \quad \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\delta_1^2}{n_1^2} \right) = \frac{- \left[\frac{(h^2+\varepsilon)^2}{\kappa^2 h^2} - 4\varepsilon \right] \frac{4\kappa h^2(1+\varepsilon)}{h^2+\varepsilon} + \left[h^2+1 - \frac{2\kappa^2 h^2(1+\varepsilon)}{h^2+\varepsilon} \right] \frac{2(h^2+\varepsilon)^2}{\kappa^2 h^2}}{\left[\frac{(h^2+\varepsilon)^2}{\kappa^2 h^2} - 4\varepsilon \right]^2}$$

und daraus für $\kappa = 1$ nach einigen Umformungen

$$(53) \quad \left[\frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\delta_1^2}{n_1^2} \right) \right]_{\kappa=1} = \frac{2h^2(h^6 - 3h^4 + 3h^2\varepsilon^2 - \varepsilon^2)}{(h^2+\varepsilon)(h^2-\varepsilon)^2}.$$

Auch hier kann man wieder zur näherungsweisen Berechnung von (53) $h = 1$ setzen und erhält dann

$$(54) \quad \left[\frac{d}{d\kappa} \left(\frac{\delta_1^2}{n_1^2} \right) \right]_{\substack{\kappa=1 \\ h=1}} = - \frac{4}{(1-\varepsilon)^2}.$$

Um die Werte der Ableitung von δ_1/n_1 selbst zu erhalten, hat man dies wieder durch die doppelten in Tab. I angegebenen Werte von δ_1/n_1 zu dividieren.

Aus (54) folgt, daß auch die Dämpfung δ_1 und δ_2 der freien Systeme ebenso wie die Koppelung K abnehmen muß, wenn κ zunimmt, wenn man also vom Fall IC durch IA zu IB übergeht. Das bedeutet in Worten:

Zur Verwirklichung des Falles IB muß die Dämpfung der freien Systeme kleiner, zur Verwirklichung des Falles IC muß sie größer sein als im Fall IA.

Bei den praktisch allein in Betracht kommenden Systemen mit sehr verschiedenen starken Dämpfungen der beiden Teilsysteme, bei denen also ε nicht in der Nähe von 1 liegt, ergibt sich weiter, daß die Dämpfung *schneller* als die Koppelung zunehmen muß, wenn man vom Fall IB (gleiche Dämpfungen) durch IA zum Fall IC (gleiche Frequenzen) übergeht. Denn bei diesen Systemen sind K und δ_1/n_1 annähernd gleich groß, mindestens aber von gleicher Größenordnung, so daß die Divisoren, mit denen die rechten Seiten von (51) und (54) zu dividieren sind, um daraus die Ableitungen von K und δ_1/n_1 nach κ zu erhalten, annähernd gleich groß sind. Die Zähler aber — eben die Werte (51) und (54) — sind in dem Sinne verschieden, daß die obige Beziehung herauskommt.

γ) *Die zulässige Verstimmung.* Es muß noch die zulässige Verstimmung h genauer bestimmt werden. Ist nämlich das Verhältnis ε der Dämpfungen der beiden freien Teilsysteme gegeben, so kann man h nicht mehr ganz beliebig wählen, wenn man einen der drei Fälle A, B, C verwirklichen will. Innerhalb welchen Wertgebietes man h zu wählen hat, hängt dabei von dem einmal angenommenen Verhältnis ε ab, und zwar insbesondere davon, welches der beiden Systeme das schwächer gedämpfte ist, ob also $\varepsilon >$ oder < 1 ist.

Zunächst muß ohne Rücksicht auf den besonderen Wert von ε immer eine bestimmte Beziehung zwischen den drei Größen h , ε und κ erfüllt sein, damit überhaupt einer der drei Fälle A, B, C mit reellen Werten der Systemkonstanten verwirklicht werden kann. Diese Beziehung folgt aus (38) und sagt nur aus, daß der Koppelungsparameter K reell sein muß. Sie lautet

$$(55) \quad h^2 + \varepsilon \underset{(-)}{>} \kappa h (1 + \varepsilon)$$

und läßt sich auch in die Form bringen

(55a)

$$\kappa < F,$$

$$(\quad)$$

wobei

(56)

$$F = \frac{h^2 + s}{h(1 + s)}$$

eine charakteristische Funktion darstellt, die übrigens wie X ungeändert bleibt, wenn man h und s , beide zugleich, durch ihre reziproken Werte \bar{h} und \bar{s} (vgl. (47)) ersetzt. Das Gleichheitszeichen in (55) ergibt übrigens den Koppelungsparameter $K = 0$, so daß praktisch nur das $>$ -Zeichen in Betracht kommt.

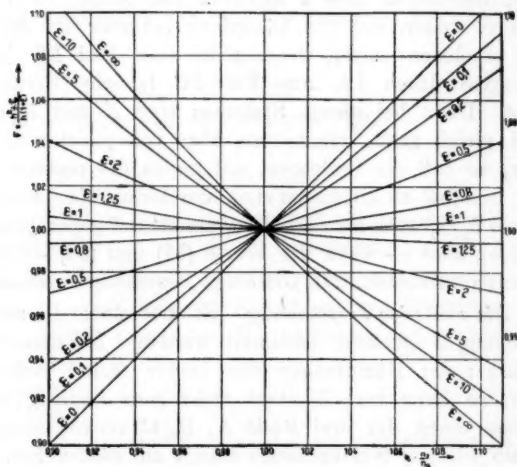


Fig. 6.

Die Gleichungen (55a) und (56) legen, wenn h und s gegeben sind, eine obere Grenze für κ fest. In Tab. II sind diese Grenzwerte F für verschiedene Wertepaare (h, s) berechnet und zusammengestellt; in Fig. 6 sind sie in Kurvenform mit h als Abszissen und s als konstantem Parameter dargestellt. Diese Kurven haben jede ein Minimum, dessen Lage sich mit wachsendem s von kleineren zu größeren Abszissen h verschiebt. Für $s = 1$ liegt es an der Stelle $h = 1$ für die übrigen hier benutzten Parameterwerte s liegen diese Minima bereits so weit von der Resonanzstelle entfernt, daß sie in der Figur nicht mehr erscheinen.

Tabelle II.

Werte der Funktion $F = \frac{h^2 + \varepsilon}{h(1 + \varepsilon)}$.

	$h = 0,9$	$h = 0,99$	$h = 0,999$	$h = 1$	$h = 1,001$	$h = 1,01$	$h = 1,1$
$\varepsilon = 0$	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$\varepsilon = 0,1$	0,91919	0,99183	0,99918	1	1,00082	1,00810	1,08264
$\varepsilon = 0,2$	0,93518	0,99335	0,99933	1	1,00067	1,00668	1,06818
$\varepsilon = 0,5$	0,97037	0,99670	0,99967	1	1,00033	1,00337	1,03636
$\varepsilon = 0,8$	0,99383	0,99893	0,99989	1	1,00011	1,00116	1,01515
$\varepsilon = 1$	1,00556	1,00005	1,00000	1	1,00000	1,00005	1,00455

Fortsetzung von Tabelle II.

	$h = 0,909090$	$h = 0,990099$	$h = 0,999001$	$h = 1$	$h = 1,001001$	$h = 1,010101$	$h = 1,111111$
$\varepsilon = 1$	1,00455	1,00005	1,00000	1	1,00000	1,00005	1,00556
$\varepsilon = 1,25$	1,01515	1,00116	1,00011	1	0,99989	0,99898	0,99383
$\varepsilon = 2$	1,03636	1,00337	1,00033	1	0,99967	0,99670	0,97037
$\varepsilon = 5$	1,06818	1,00668	1,00067	1	0,99933	0,99335	0,93518
$\varepsilon = 10$	1,08264	1,00810	1,00082	1	0,99918	0,99183	0,91919
$\varepsilon = \infty$	1,1	1,01	1,001	1	0,999	0,99	0,9

Man kann aus dieser Figur ohne weiteres ersehen, welche von den drei Fällen A, B, C man mit einem bestimmten, irgendwie gewählten Wertepaare (h , ε) verwirklichen kann. Z. B. sieht man, daß mit $\varepsilon = 0,5$ (also, wenn die Dämpfung von System 2 halb so groß wie von System 1 ist) und Werten von h , die < 1 sind, nur der Fall C (gleiche Frequenzen, ungleiche Dämpfungen) ($\kappa < 1$) herstellbar ist, die Fälle A und B dabei ausgeschlossen sind; sie können mit $\varepsilon = 0,5$ erst verwirklicht werden, wenn man $h > 1$ werden läßt, also die Frequenz von System 2 größer nimmt als von System 1. Insbesondere folgt für den wichtigen Sonderfall A, wo $\kappa = 1$ ist, folgendes:

Für $\varepsilon > 1$ sind alle Werte $h < 1$ zulässig, für $\varepsilon < 1$ sind alle Werte $h > 1$ zulässig; außerdem können noch gewisse Werte $h < 1$ mit gewissen Werten $\varepsilon < 1$ kombiniert werden, die in einem bestimmten engen Bereich unterhalb 1 liegen, und gewisse Werte $h > 1$ können ebenso mit gewissen in einem engen Bereich oberhalb 1 liegenden Werten $\varepsilon > 1$ kombiniert werden, so daß der Fall I A entsteht.

Genauerer hierüber leitet man am besten unmittelbar aus Gleichung (41) ab, die für $\kappa = 1$ gilt. Wenn man dieses kleine Gebiet in der Umgebung von $\varepsilon = 1$ aus der Betrachtung ausschaltet, was unbedenklich geschehen kann, weil die aus ihm stammenden Systeme wegen zu großer resultierender Dämpfung keine praktisch brauchbaren Fälle A, B, C liefern, so ergibt sich für den Rest die oben Kursiv gedruckte, bei Aufstellung der Tabelle I schon benutzte Beziehung zwischen den Wertebereichen von h und ε .

Das wesentliche Ergebnis dieser Überlegungen läßt sich, wenn auch nicht erschöpfend — nämlich mit der vorher angegebenen Einschränkung —, in folgende Worte fassen:

Um Fall IB (und auch IA) zu verwirklichen, muß man bei Werten $\varepsilon < 1$ Werte $h > 1$ benutzen, bei Werten $\varepsilon > 1$ ebenso Werte $h < 1$. Zur Herstellung des Falles IC können bei $\varepsilon < 1$ in gewissen, ziemlich weiten Grenzen auch Werte $h < 1$, bei $\varepsilon > 1$ auch Werte $h > 1$ genommen werden.

In den folgenden Nummern werden in gleicher Weise die übrigen Koppelungsarten behandelt werden, wobei sich manche Ähnlichkeiten, aber auch charakteristische Unterschiede ergeben.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule.

(Eingegangen 12. August 1913.)

**6. Elektrodynamische Theorie der Lichtbogen-
und Funkenentladung;
von Arthur Szarvassi.**

Eine wirklich exakte theoretische Behandlung von elektrischen Stromkreisen, in denen Lichtbogen oder Funkenstrecken eingeschaltet sind, wird man sicherlich erst geben können, wenn der Kraftlinienverlauf in einer solchen Entladungsstrecke in jedem Momente genau bekannt ist. Von diesem Ziele sind wir noch weit entfernt. Indessen werden die Forderungen von Wissenschaft und Technik immer dringender, wenigstens angenähert den Einfluß solcher Entladestrecken auf den Stromverlauf kennen zu lernen. Der Wunsch, den zeitlichen Verlauf der Ströme sowie die Abhängigkeit der Elektrodenspannung von der Stromstärke zu kennen, ohne auf die unbekannte räumliche Verteilung des elektrischen Feldes in der Entladungsstrecke rekurrieren zu müssen, ist ähnlich jenem, ohne Benutzung der Maxwell'schen Theorie die Erscheinungen zeitlich veränderlicher Ströme in metallischen Leitern zu überblicken. Aber freilich liegen in unserem Falle die Verhältnisse weit weniger günstig als in der bekannten Theorie quasistationärer elektrischer Stromkreise. Man wünscht, die Erscheinungen durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, in denen nur Ableitungen nach der Zeit vorkommen, zu beschreiben; notwendigerweise können die Eigenschaften der Entladungsstrecke dabei nur durch rohe Mittelwerte charakterisiert werden. Angesichts der wunderbaren Kompliziertheit elektrischer Entladungsercheinungen scheinen die Verhältnisse hier kaum günstiger zu liegen als etwa in der technischen Hydraulik, wenn diese das System der hydrodynamischen Gleichungen durch die einfache Stromfadentheorie ersetzt. Die guten Erfolge jedoch, die man bei dieser Behandlungsweise im vorliegenden Falle

erzielt, zeigen, daß man der Wahrheit viel näher kommt als im analogen Falle der Hydrodynamik.

Es ist im folgenden versucht, eine derartige elektrodynamische Theorie der Bogen- und Funkenentladung in Form eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu geben. Den Anstoß zu den vorliegenden Untersuchungen haben die schönen Arbeiten von Hrn. H. Th. Simon über den elektrischen Lichtbogen¹⁾ gegeben, und man kann die folgende Theorie als einen Ausbau der Simonschen Ansätze ansehen. Es wurden stets die einfachsten, nächstliegenden Annahmen zugrunde gelegt, und bei der dadurch erreichten Durchsichtigkeit der Theorie sind Erweiterungen, die sich etwa als notwendig herausstellen sollten, leicht vorzunehmen. Eine solche Theorie wie die ganze ihr zugrunde liegende — heute übrigens durchaus übliche — Betrachtungsweise hat ja einen mehr provisorischen Charakter und ist wohl nur als Vorläuferin einer zukünftigen exakten Theorie anzusehen.

Die vorliegende Arbeit gibt eine Anzahl Konsequenzen der Theorie, welche sich auf den eigentlichen Lichtbogen beziehen. Andere, im besonderen diejenigen, welche die Funkenentladung angehen, sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden. Von den in dieser Arbeit mitgeteilten Folgerungen der Theorie seien die folgenden als neu hervorgehoben:

Eine Gesetzmäßigkeit der Strom- und Spannungskurve von Wechselstromlichtbogen;

die Bestimmung des exakten Kriteriums für das Entstehen von Lichtbogenschwingungen erster Art;

die Berechnung der Periode derselben.

Grundlegung der Theorie.

Als diejenige Variable, durch welche sich die Gesetzmäßigkeiten einer Lichtbogen- oder Funkenstrecke am einfachsten beschreiben lassen, betrachte ich die durch das Verhältnis von Stromstärke i und Elektrodenspannung e gegebene Leitfähigkeit der Gasstrecke

$$(1) \quad \sigma = \frac{i}{e}.$$

1) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. 6. p. 297; Jahrb. f. drahtl. Telegraphie 1. p. 16.

Die Änderung dieser Größe als Funktion der Zeit t sei nun durch die folgende Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -a\sigma + c(ei - e_0 i_0) + d_a T_a + d_k T_k.$$

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung repräsentieren die Ursachen, durch welche die Leitfähigkeit einer Gasstrecke sich ändert:

Das erste Glied stellt die automatische Selbstionisierung einer sich selbst überlassenen Gasstrecke dar; die Konstante a , welche die Dimension einer Dämpfung hat, kann man die „Abklingungskonstante der Ionisation“ nennen.

Das zweite Glied repräsentiert die bei selbständiger Strömung vorhandene automatische Selbstionisierung, die Stoßionisierung, des Gases. Es ist als lineare Funktion der Energieproduktion des Stromes angesetzt, und der Tatsache ist Rechnung getragen, daß erst von einem gewissen Energiewert $e_0 i_0$ aufwärts Stoßionisation einsetzt; c ist eine vom Gasdruck abhängige Materialkonstante des Gases.

Die beiden letzten Glieder, bei denen die Indizes a und k die Zugehörigkeit zur Anode resp. Kathode markieren, stellen die Elektronenemission der glühenden Elektroden dar. T ist die absolute Temperatur, d_a und d_k sind charakteristische Konstanten der Elektroden.

Führen wir noch zur Abkürzung die Konstante

$$b = c e_0 i_0$$

ein, so lautet die Differentialgleichung folgendermaßen:

$$(I) \quad \frac{d\sigma}{dt} + a\sigma + b = c e i + d_a T_a + d_k T_k.$$

Nun genügen die Elektrodentemperaturen selbst wieder je einer Differentialgleichung von folgender Form:

$$\frac{dT_a}{dt} = -s_a (T_a - T_0) + r_a e i,$$

$$\frac{dT_k}{dt} = -s_k (T_k - T_0) + r_k e i.$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten in beiden Gleichungen geben die durch Wärmeleitung verursachte Herabminderung der Temperatur. Dieser Effekt ist der Differenz der Temperaturen

von Elektrode und Umgebung (T_0) proportional; die Materialkonstanten s_a und s_k , welche die Dimension eines Dämpfungsfaktors haben, könnte man „Abklingungskonstanten der Elektrodentemperaturen“ nennen.

Das zweite Glied in beiden Gleichungen bezieht sich auf die durch die Stromwärme bewirkte Temperaturerhöhung; die Größen r_a und r_k sind Konstanten der Elektroden, aber auch des zwischen ihnen befindlichen Gases.

Führen wir noch die abkürzenden Bezeichnungen ein

$$s_a T_0 = h_a, \quad s_k T_0 = h_k,$$

so lauten die beiden Gleichungen

$$(II) \quad \frac{dT_a}{dt} + s_a T_a = r_a e i + h_a,$$

$$(III) \quad \frac{dT_k}{dt} + s_k T_k = r_k e i + h_k.$$

Das System der drei Gleichungen (I), (II), (III), welches die Entladungsstrecke in elektrodynamischer Hinsicht charakterisiert, heiße die „dynamische Charakteristik“ derselben. Zusammen mit den bekannten Gleichungen für veränderliche Ströme reicht es hin, jede Frage nach der elektrodynamischen Konstitution eines elektrisch durchströmten Leitersystems zu beantworten.

Das hier aufgestellte Gleichungssystem soll für die Erscheinungen der Bogen- wie der Funkenentladung in gleicher Weise ausreichen. In der Tat ist zwischen beiden nur ein gradueller Unterschied: Bei der Bogenentladung tritt der Einfluß der Gleichungen (II) und (III) stark hervor, während für die rasch ablaufende Funkenentladung die gleichzeitig eintretenden Temperaturänderungen der Elektroden schwach und bei raschen Schwingungen unmerklich werden. Das Gleichungssystem beansprucht nicht mehr als die erste Skizze einer Theorie zu sein und wird vielleicht in manchen Punkten einer Erweiterung bedürfen; so ist z. B. der Einfluß der bei der Bogenentladung eintretenden Verdampfung auf die Ionisation nur durch das Glied cei der Gleichung (I) berücksichtigt. Allein die Grundform der Gleichungen dürfte trotz etwaiger nachträglicher Erweiterungen dieselbe bleiben; und die bis jetzt von mir aus dem Gleichungssystem gezogenen Folgerungen zeigen,

daß es die bekannten Erscheinungen sehr gut beschreibt und auch geeignet ist, auf neue, bisher unbekannte Tatsachen hinzuweisen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir auf Erscheinungen, die durch Verschiedenheit der beiden Elektroden entstehen, keine Rücksicht nehmen. Wir setzen also

$$s_a = s_k = s, \quad h_a = h_k = h.$$

Hingegen dürfen wir weder die beiden Konstanten d_a und d_k noch auch r_a und r_k gleich annehmen, da sowohl die polaren Unterschiede der Ionisierung durch glühende Elektroden als auch jene der Erhitzung der Elektroden durch den Strom der Entladungsstrecke auch bei völlig gleichgestalteten Elektroden vorhanden sind; nur kommen diese Verschiedenheiten bei der gemachten Annahme nicht zur Geltung, wie sich sogleich zeigen soll. In der Tat: Multiplizieren wir Gleichung (II) mit d_a , Gleichung (III) mit d_k und addieren, setzen wir ferner zur Abkürzung

$$d_a + d_k = d_0, \quad d_a T_a + d_k T_k = d_0 T, \quad d_a r_a + d_k r_k = d_0 r,$$

so lautet die dynamische Charakteristik

$$(2) \quad \frac{d\sigma}{dt} + a\sigma + b = cei + d_0 T,$$

$$(3) \quad \frac{dT}{dt} + sT = rei + h.$$

Nummehr wollen wir aus den Gleichungen (I), (II), (III), resp. (2) und (3) Folgerungen ziehen.

Statische Charakteristik des Lichtbogens.

Hierunter versteht man, wie bekannt, den Zusammenhang zwischen Elektrodenspannung und Stromstärke eines stationär brennenden Lichtbogens. Wir erhalten sie in voller Allgemeinheit aus den Gleichungen (I), (II) und (III), indem wir in denselben die Ableitungen nach der Zeit null setzen:

$$a\sigma + b = cei + d_a T_a + d_k T_k, \\ s_a T_a = r_a ei + h_a, \quad s_k T_k = r_k ei + h_k.$$

Substituieren wir aus den zwei letzten Gleichungen die Werte für T_a und T_k in die erste, so erhalten wir mit Berücksich-

tigung von (1) die statische Charakteristik, ausgedrückt in σ und i

$$(4) \quad \sigma^2 + m\sigma = ni^2;$$

oder ausgedrückt in e und i ,

$$(5) \quad e^2 - \frac{m}{ni}e - \frac{1}{n} = 0.$$

Hierbei wurde abkürzungsweise gesetzt:

$$\frac{1}{a} \left(b - \frac{d_a h_a}{s_a} - \frac{d_b h_b}{s_b} \right) = m, \quad \frac{1}{a} \left(c + \frac{d_a r_a}{s_a} + \frac{d_b r_b}{s_b} \right) = n.$$

Berechnen wir aus der in e quadratischen Gleichung (5) die positive Wurzel — nur um diese handelt es sich ja —:

$$e = \frac{m}{2ni} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{m^2}{4n^2i^2}}.$$

Bekanntlich hat Frau Hertha Ayrton eine empirische Formel für den Zusammenhang zwischen Elektrodenspannung und Stromstärke gefunden, die recht gut mit der Erfahrung stimmt. Sie lautet:

$$e = A + \frac{B}{i}.$$

Man erkennt, daß die Ayrtonsche Formel für größere Stromstärken eine Näherung der meinigen ist, welche ja in diesem Falle angenähert die Form hat

$$e = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{m}{2ni}}.$$

Eine Entscheidung zwischen meiner und der Ayrtonschen Form der statischen Charakteristik wäre nur bei kleinen Stromstärken möglich; die vorliegenden Experimente sind aber für diese Entscheidung nicht genau genug. So z. B. folgen aus den Ayrtonschen Messungen bei einer Bogenlänge von 1 mm¹⁾ die Werte der Konstanten meiner Formel ungefähr

$$\frac{1}{n} = 1672,55, \quad \frac{m}{2n} = 21,15,$$

und mit diesen gerechnet ergäbe sich bei einer Stromstärke von 1,96 Amp. eine Elektrodenspannung von 53,1 Volt, während die Ayrtonsche Charakteristik 52,0 Volt ergibt. Aber wie

1) H. Ayrton, The electric arc, p. 122.

aus einer veröffentlichten Probe des Ayrtonschen Beobachtungsjournals¹⁾ ersichtlich ist, beträgt der mittlere Fehler der Einzelmessungen bei Stromstärken bis zu ca. 4 Amp. über 1 Volt, und einzelne Messungen weichen vom Mittel um 2 Volt ab.

Lichtbogenhysteresis.

Eine Erscheinungsgruppe sei durch eine „Charakteristik“, eine Gleichung zwischen zwei Zustandsvariablen beschrieben; sie seien x und y (z. B. x = Temperatur, magnetische Feldstärke, Stromstärke; y = resp. Dampfdruck, Magnetisierung, Elektrodenspannung). Man sagt dann, daß die Erscheinung Hysteresis zeige, wenn die eine Variable y nicht bloß von x , sondern auch von dx/dt abhängt, wenn also auch die Änderungstendenz der Zustandsgröße y auf die Erscheinung von Einfluß ist. Im besonderen ist von den Erscheinungen des Magnetismus her jener Fall unter dem Namen Hysteresis bekannt, wo schon eine bloße Vorzeichenänderung von dx/dt auf die Charakteristik von Einfluß ist, wo also der aufsteigende Ast der Charakteristik anders verläuft als der absteigende. Hysteresis wird also im allgemeinen stets auftreten, wenn die Gleichung der Charakteristik nicht nur x , sondern auch dx/dt enthält, wenn wir es also mit einer Differentialgleichung, in der die Zeit t die unabhängige Veränderliche ist, der „dynamischen Charakteristik“ zu tun haben. Dies ist im vorliegenden Falle erfüllt, und es ist klar, daß unsere Gleichungen die von Hrn. H. Th. Simon entdeckte Erscheinung der Lichtbogenhysteresis ergeben werden.

Jedoch ist es bemerkenswert, daß nach meiner Theorie die Hysterese des Lichtbogens nicht, wie nach der Simonischen Auffassung, ein Temperatureffekt allein ist, sondern auch auftritt, wenn, wie dies bei raschen Schwingungen wahrscheinlich ist, die Temperatur der Elektroden während des Ablaufs einer Schwingung sich nicht merklich ändert. In der Tat zeigt Gleichung (I), daß auch bei konstanten Werten von T_a und T_k noch Hysteresis vorhanden sein wird. Diese verdankt ihre Entstehung dem Zusammenwirken von Selbstionisierung und Selbstentionisierung der Gasstrecke.

1) l. c. p. 121.

Verfolgen wir in diesem einfachen Falle die Erscheinung etwas näher: Wir setzen also in Gleichung (I) die Größen T_1 und T_2 konstant, nämlich gleich den Mittelwerten der Temperatur der Elektroden. Beziehen wir die Glieder $d_1 T_1$ und $d_2 T_2$ in die Konstante b mit ein, so lautet also nun die Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dt} + a\sigma + b = cei$$

oder

$$\sigma' + a\sigma + b = c \frac{i^2}{\sigma}.$$

Der betrachtete Vorgang sei periodisch, wie es etwa bei einem gewöhnlichen Wechselstromlichtbogen der Fall ist; σ und i sind also periodische Funktionen der Zeit. Wir betrachten zwei Punkte der σ - t -Kurve, für welche die Werte von σ gleich und gleich bezeichnet, die von σ' entgegengesetzt bezeichnet sind; diese letzteren seien σ_1' und $-\sigma_2'$. Diesen zwei Punkten der σ -Kurve entsprechen zwei Werte der i - t -Kurve, die wir mit i_1 und i_2 bezeichnen wollen. Die beiden Wertsysteme genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_1' + a\sigma + b &= c \frac{i_1^2}{\sigma} \\ -\sigma_2' + a\sigma + b &= c \frac{i_2^2}{\sigma}.\end{aligned}$$

Subtraktion der beiden gibt

$$(\sigma_1' + \sigma_2')\sigma = c(i_1^2 - i_2^2).$$

Ist σ_1' und daher auch σ_2' positiv, dann ist

$$i_1 > i_2.$$

Demnach entsprechen wachsenden σ -Werten größere i -Werte als abnehmenden. Die σ - i -Kurve wird also von einer zur i -Achse parallelen Geraden zweimal geschnitten. Nimmt man nun beispielsweise an, wie es auch der Wirklichkeit entspricht, daß mit wachsendem σ auch i wächst, so folgt, daß umgekehrt wachsenden i -Werten die kleineren σ -Werte, also nach Gleichung (1) die größeren e -Werte entsprechen. Dies zeigt in der Tat die Erfahrung, wie Hr. Simon nachgewiesen hat.¹⁾ Daß die Hysteresiserscheinungen noch bei Frequenzen von 10⁶/sek und darüber, wo ein Mitschwingen der Elektroden-

1) H. Th. Simon. Physik. Zeitschr. 6. p. 305 ff.

temperatur schon wenig wahrscheinlich ist, recht kräftig sich bemerkbar machen,¹⁾ ist nach der vorliegenden Theorie wohl verständlich. Nach dieser könnte diese Erscheinung auch noch bei sehr großen Schwingungszahlen von Funkenentladungen auftreten.

Der Wechselstromlichtbogen.

Wir wollen eine Anwendung unserer Gleichungen zur Untersuchung der Schwingungsform des Wechselstromlichtbogens machen. In einen Stromkreis mit der Selbstinduktion p und dem Widerstande w sei eine periodische elektromotorische Kraft E und der Lichtbogen eingeschaltet. Die bekannte Wechselstromgleichung lautet:

$$p \frac{di}{dt} + wi + e = E.$$

Hierzu tritt nun die dynamische Charakteristik, die wir in der vereinfachten Form (2), (3) annehmen. Doch führen wir an Stelle von σ den veränderlichen Bogenwiderstand $\omega = 1/\sigma$ als Variable ein:

$$\frac{d\omega}{dt} = a\omega + b\omega^2 - ce^2\omega - d_0 T \omega^2,$$

$$\frac{dT}{dt} = -sT + rei + h.$$

Nun nehmen wir eine einfach harmonische EMK. an und setzen

$$E = E_0 \sin \nu t.$$

Führen wir noch an Stelle von t die neue Veränderliche x ein durch die Beziehung

$$\nu t = x,$$

so erhalten wir die nachfolgenden Gleichungen:

$$(6) \quad \frac{di}{dx} + \frac{1}{p\nu} (wi + e) = \frac{E_0}{p\nu} \sin x$$

$$(7) \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{\nu} (a - ce^2) \omega - \frac{1}{\nu} (d_0 T - b) \omega^2,$$

$$(8) \quad \frac{dT}{dx} = \frac{1}{\nu} (rei + h - sT)$$

$$(9) \quad e = i\omega.$$

Nunmehr führen wir an Stelle der abhängigen Veränderlichen ω und T neue durch die Substitutionen ein

1) D. Roschansky, Physik. Zeitschr. 9. p. 627.

$$\omega = \omega_0 + y, \quad T = T_0 + z^1),$$

wo die Konstanten ω_0, T_0 durch die Anfangswerte von ω und T zu bestimmen sind. Setzen wir noch

$$s T_0 - h = \alpha r, \quad a \omega_0 - (d_0 T_0 - b) \omega_0^2 = \lambda c,$$

so lauten schließlich die Gleichungen (6) bis (9):

$$(6a) \quad \frac{di}{dx} + \frac{w}{p\nu} i + \frac{1}{p\nu} e = \frac{E_0}{p\nu} \sin x,$$

$$(7a) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{a - 2(d_0 T_0 - b)\omega_0}{\nu} y = \frac{c}{\nu} [\lambda - e^2(\omega_0 + y)] \\ \quad - \frac{d_0}{\nu} z(\omega_0 + y)^2 - \frac{d_0 T_0 - b}{\nu} y^2, \end{cases}$$

$$(8a) \quad \frac{dz}{dx} + \frac{s}{\nu} z = \frac{r}{\nu} (ei - \alpha),$$

$$(9a) \quad e = i(\omega_0 + y).$$

Wir suchen periodische Integrale der Gleichungen mit der Periode 2π . Nun erkennt man, daß für $c = r = 0$ die Gleichungen folgende periodische Lösung zulassen:

$$i = i_0 = J_0 \sin(x - \varphi); \quad y = z = 0; \quad e = e_0 = \omega_0 i_0$$

$$J_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(w + \omega_0)^2 + p^2 \nu^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{p\nu}{w + \omega_0}.$$

Ausgehend von dieser Näherungslösung konstruieren wir nach der Methode von Poincaré²⁾ die gesuchte periodische Lösung durch Entwicklung nach Potenzen der Parameter c/ν und r/ν . Wir setzen also:

$$i = i_0 + \frac{c}{\nu} i_{10} + \frac{r}{\nu} i_{01} + \left(\frac{c}{\nu}\right)^2 i_{20} + \frac{c}{\nu} \frac{r}{\nu} i_{11} + \left(\frac{r}{\nu}\right)^2 i_{02} + \dots$$

$$e = e_0 + \frac{c}{\nu} e_{10} + \frac{r}{\nu} e_{01} + \left(\frac{c}{\nu}\right)^2 e_{20} + \frac{c}{\nu} \frac{r}{\nu} e_{11} + \left(\frac{r}{\nu}\right)^2 e_{02} + \dots$$

$$y = \frac{c}{\nu} y_{10} + \frac{r}{\nu} y_{01} + \left(\frac{c}{\nu}\right)^2 y_{20} + \frac{c}{\nu} \frac{r}{\nu} y_{11} + \left(\frac{r}{\nu}\right)^2 y_{02} + \dots$$

$$z = \frac{c}{\nu} z_{10} + \frac{r}{\nu} z_{01} + \left(\frac{c}{\nu}\right)^2 z_{20} + \frac{c}{\nu} \frac{r}{\nu} z_{11} + \left(\frac{r}{\nu}\right)^2 z_{02} + \dots$$

Wir denken uns diese Reihen in die Gleichungen (6a) bis (9a) eingesetzt und in jeder Gleichung die Glieder mit gleich

1) Die Konstante T_0 hat natürlich nichts zu tun mit der in den Gleichungen (II) und (III) enthaltenen gleichnamigen Größe.

2) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1. p. 79 ff.

hohen Potenzen von c/v und r/v verglichen. Wir erhalten so zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihen eine Reihe von Differentialgleichungen. Wir beginnen mit (8a) und erhalten zur Bestimmung von z_{01} die Gleichung

$$\frac{dz_{01}}{dx} + \frac{s}{v} z_{01} = e_0 i_0 - x = \left(\frac{\omega_0 J_0^2}{2} - x \right) - \frac{1}{2} \omega_0 J_0^2 \cos 2(x - \varphi),$$

während $z_{10} = 0$ ausfällt. Hierauf bekommen wir aus (7a)

$$\frac{dy_{10}}{dx} - \frac{a - 2(d_0 T_0 - b)\omega_0}{v} y_{10} = \lambda - e_0^2 \omega_0 = \left(\lambda - \frac{\omega_0^3 J_0^2}{2} \right) + \frac{\omega_0^3 J_0^2}{2} \cos 2(x - \varphi)$$

und

$$\frac{dy_{01}}{dx} - \frac{a - 2(d_0 T_0 - b)\omega_0}{v} y_{01} = - \frac{\omega_0^2}{v} z_{01}.$$

Endlich liefern uns (6a) und (9a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{di_{10}}{dx} + \frac{w}{p v} i_{10} &= - \frac{1}{p v} e_{10}, \\ e_{10} &= \omega_0 i_{10} + i_0 y_{10} \end{aligned}$$

zur Bestimmung von i_{10} und e_{10} , sowie die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{di_{01}}{dx} + \frac{w}{p v} i_{01} &= - \frac{1}{p v} e_{01}, \\ e_{01} &= \omega_0 i_{01} + i_0 y_{01} \end{aligned}$$

zur Bestimmung von i_{01} und e_{01} . Für die übrigen lauten die Rekursionsformeln allgemein folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{dz_{mn}}{dx} + \frac{s}{v} z_{mn} &= \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n e_{\alpha\beta} i_{m-\alpha, n-\beta-1} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_{mn}}{dx} - \frac{a - 2(d_0 T_0 - b)\omega_0}{v} y_{mn} &= - \omega_0 \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n e_{\alpha\beta} e_{m-\alpha-1, n-\beta} \\ &- \sum_{\alpha, \gamma=0}^{m-1} \sum_{\beta, \delta=0}^n e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} y_{m-\alpha-\gamma-1, n-\beta-\delta} - \frac{d_0 \omega_0^2}{v} z_{mn} \\ &- \frac{2d_0 \omega_0}{v} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n z_{\alpha\beta} y_{m-\alpha, n-\beta} - \frac{d_0}{v} \sum_{\alpha, \gamma=0}^{m-1} \sum_{\beta, \delta=0}^n y_{\alpha\beta} y_{\gamma\delta} z_{m-\alpha-\gamma, n-\beta-\delta} \\ &- \frac{d_0 T_0 - b}{v} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n y_{\alpha\beta} y_{m-\alpha, n-\beta} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$(12) \quad \frac{d i_{m n}}{d x} + \frac{\omega + \omega_0}{p \nu} i_{m n} = - \frac{1}{p \nu} \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n i_{\alpha \beta} y_{m-\alpha, n-\beta}$$

$$(13) \quad e_{m n} = \omega_0 i_{m n} + \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n i_{\alpha \beta} y_{m-\alpha, n-\beta}.$$

Die hier auftretenden Differentialgleichungen haben sämtlich die Form

$$\frac{d u}{d x} + p u = f(x),$$

wo p eine Konstante und $f(x)$ eine bekannte Funktion von x ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet bekanntlich

$$u = e^{-p x} \left[A + \int_0^x e^{p v} f(v) d v \right];$$

die Integrationskonstante A ist natürlich durch die Anfangsbedingung bestimmt. Nun sei $f(x)$ eine durch eine endliche Fourierreihe gegebene periodische Funktion, also

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_k \cos kx + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_k \sin kx.$$

Dann wird das Integral

$$u = e^{-p x} \left[A + \sum_{\varrho=0}^k \int_0^x e^{p v} (a_{\varrho} \cos \varrho v + b_{\varrho} \sin \varrho v) d v \right].$$

Damit dieser Ausdruck periodisch werde, muß die Integrationskonstante A der Bedingung genügen

$$A + \sum_{\varrho=0}^k \frac{\varrho b_{\varrho} - p a_{\varrho}}{\varrho^2 + p^2} = 0.$$

Der entsprechenden Bedingung haben also zunächst die Anfangsbedingungen der Gleichungen (10) bis (13) zu genügen. Dann lautet das periodische Integral

$$u = \sum_{\varrho=0}^k \left(\frac{p a_{\varrho} - \varrho b_{\varrho}}{\varrho^2 + p^2} \cos \varrho x + \frac{\varrho a_{\varrho} + p b_{\varrho}}{\varrho^2 + p^2} \sin \varrho x \right).$$

Es seien nun sämtliche $i_{\mu \nu}$, $e_{\mu \nu}$, $y_{\mu \nu}$, $z_{\mu \nu}$, die auf den rechten Seiten der Gleichungen (10), (11), (12), (13) vorkommen, durch endliche Fourierreihen dargestellte periodische Funktionen; dann sind auch die ganzen der Funktion $f(x)$ entsprechenden rechten Seiten der Gleichungen endliche Fourier-

reihen. Folglich werden nach der eben angestellten Betrachtung auch die Integrale der Gleichungen i_{mn} , e_{mn} , y_{mn} , z_{mn} periodische Funktionen von x mit der Periode 2π , falls man die Anfangsbedingungen, wie eben festgesetzt, bestimmt.

Erinnern wir uns nun an folgende Eigenschaft trigonometrischer Funktionen: Multipliziert man zwei Fouriersche Reihen miteinander, in denen nur Glieder mit geradzahligem Index stehen, also etwa die beiden Reihen

$$a_0 + a_2 \cos 2x + a_4 \cos 4x + \dots + b_2 \sin 2x + b_4 \sin 4x + \dots,$$

$$\text{und } c_0 + c_2 \cos 2x + c_4 \cos 4x + \dots + d_2 \sin 2x + d_4 \sin 4x + \dots,$$

so erhält man eine Fourierreihe, die wiederum nur Glieder mit geradem Index enthält. Multipliziert man ferner zwei Fourierreihen, in denen nur Glieder mit ungeradem Index vorkommen, miteinander, so entsteht abermals eine Fourierreihe, die nur Glieder mit geradem Index enthält. Multipliziert man jedoch eine Fourierreihe, die nur Glieder mit geradem Index enthält, mit einer solchen, die nur Glieder mit ungeradem Index enthält, so entsteht eine Fourierreihe, die lauter Glieder mit ungeradem Index enthält.

Angenommen nun, von den Größen $i_{\mu\nu}$, $e_{\mu\nu}$, $y_{\mu\nu}$, $z_{\mu\nu}$ auf den rechten Seiten unserer Gleichungen seien $y_{\mu\nu}$, $z_{\mu\nu}$ solche Fourierreihen, die nur Glieder mit geradem Index enthalten, hingegen $i_{\mu\nu}$, $e_{\mu\nu}$ solche mit lauter Gliedern von ungeradem Index. Dann erkennt man zunächst aus Gleichung (10), daß die rechte Seite eine Fourierreihe wird, die nur Glieder mit geradem Index enthält; und hieraus folgt nach der obigen Überlegung, daß auch das Integral der Gleichung, also z_{mn} , eine Fourierreihe wird, welche nur Glieder mit geradem Index enthält. Auf der rechten Seite der Gleichung (11) stehen lauter Glieder derselben Eigenschaft, wie man leicht erkennt; also insgesamt eine Fourierreihe mit Gliedern von nur geradem Index. Daher berechnet sich aus der Gleichung auch y_{mn} als Fourierreihe derselben Eigenschaft. Hingegen zeigen Gleichungen (12) und (13), daß die rechten Seiten und folglich auch i_{mn} und e_{mn} Fourierreihen werden, welche nur Glieder mit ungeradem Index enthalten. Haben also sämtliche $i_{\mu\nu}$ und $e_{\mu\nu}$ bis exkl. i_{nn} und e_{nn} die Eigenschaft, nur Glieder mit ungeradem Index zu enthalten, so bekommen auch i_{nn} und e_{nn} diese Eigenschaft; und

haben alle $y_{\mu\nu}$ und $z_{\mu\nu}$ bis exkl. y_{mn} , z_{mn} die Eigenschaft, nur Glieder mit geradem Index zu enthalten, so bekommen nach den Rekursionsformeln auch y_{mn} und z_{mn} dieselbe Eigenschaft. Nun haben aber i_{01} , i_{10} , e_{01} , e_{10} , y_{01} , y_{10} , z_{01} , z_{10} , wie man aus den oben abgeleiteten Gleichungen zur Bestimmung dieser Werte sieht, die vorausgesetzte Eigenschaft. Daher folgt aus der angestellten Überlegung, daß alle $i_{\mu\nu}$, $e_{\mu\nu}$, also auch i und e selbst durch Fourierreihen dargestellt werden, welche nur Glieder mit ungeradem Index enthalten.

Aus unserer Theorie folgt also die folgende Eigenschaft eines Wechselstromlichtbogens: Sowohl in der Strom- wie in der Spannungskurve eines Wechselstromlichtbogens, der mit einer sinusförmigen EMK. betrieben wird, fehlen die ungeradzähligen Oberschwingungen. Man erkennt aus der Ableitung, daß diese Symmetrie der Kurven in bezug auf die t -Achse nur dann vorhanden ist, wenn die Konstanten d und s für beide Elektroden dieselben Werte haben. Ventilwirkungen würden also nur durch verschiedene Elektronenemission und Leitfähigkeit der Elektroden zustande kommen.

Eine genaue Prüfung dieser Aussage ist durch harmonische Analyse der Oszillogramme von Wechselstromlichtbögen möglich. Natürlich wäre es wünschenswert, die von dem Oszillographen aufgezeichneten Photogramme direkt zu analysieren. Da mir momentan kein Oszillograph zur Verfügung stand, habe ich mich damit begnügt, die in der schönen Arbeit von Blondel¹⁾ reproduzierten Oszillogramme zu analysieren. Zu diesem Zwecke wurden die Kurven auf Pauspapier möglichst getreu durchgezeichnet, und diese Pausen wurden dann mit einem harmonischen Analysator nach Mader²⁾ von Gebr. Stürzl in München analysiert. Die Analyse erstreckte sich bis zur achten Oberschwingung inkl. Im folgenden greife ich aufs Geratewohl einige Beispiele heraus, die recht verschiedenartig sind. Die Figuren³⁾ geben die analysierten Kurven. Zum Verständnis der Tabelle sei folgendes bemerkt:

1) Nouvelles recherches sur l'arc à courants alternatifs, *Lumière électrique*, t. 49. p. 560 ff.

2) O. Mader, *Elektrotechn. Zeitschr.* 1909.

3) Die Numerierung und Bezeichnung der Figuren ist der Blondelschen Arbeit entnommen.

Die Strom- oder Spannungskurve sei in der Form gegeben

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

b_0 ist natürlich null. Die Koeffizienten a_1, b_1 sind in der Tabelle in Amp., resp. Volt gegeben. Die Kurven ϵ in jeder Figur geben die EMK. der Wechselstrommaschine. Zur Kontrolle, ob die Voraussetzung der Theorie, daß nämlich die EMK. rein sinusförmig ist, erfüllt ist, wurde auch die ϵ -Kurve analysiert. Die Zahlen der Tabelle zeigen, daß diese Voraussetzung nahezu erfüllt ist. Die übrigen analysierten Kurven haben die folgende Bedeutung:

I_1 (Fig. 4) ist die Stromkurve eines nahe induktionsfreien Kreises mit einem Lichtbogen von 2 mm Bogenlänge zwischen

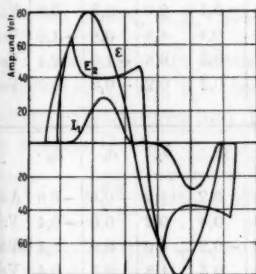


Fig. 4.

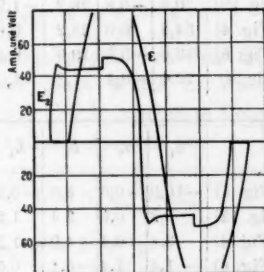


Fig. 6.

Homogenkohlen ($w = 1 \text{ Ohm}$, $p = 0,0007 \text{ Henry}$, $E_{\text{eff.}} = 56 \text{ Volt}$, $i_{\text{eff.}} = 14,3 \text{ Amp.}$, $e_{\text{eff.}} = 40,7 \text{ Volt}$);

E (Fig. 12) Spannungskurve eines induktiven Kreises mit einem Lichtbogen von 2 mm Länge zwischen einer Homogenkohle und einer Jablochkoffschen Kerze ($w = 0,1 \text{ Ohm}$, $p = 0,0121 \text{ Henry}$, $E_{\text{eff.}} = 67 \text{ Volt}$, $i_{\text{eff.}} = 7,1 \text{ Amp.}$, $e_{\text{eff.}} = 52,7 \text{ Volt}$);

E_2 (Fig. 4) Spannungskurve eines induktiven Kreises mit einem Bogen von 3 mm Länge zwischen

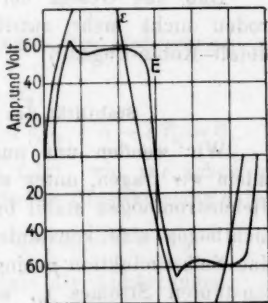


Fig. 12.

Homogenkohlen ($w = 0,1$ Ohm, $p = 0,0044$ Henry, $E_{\text{eff.}} = 56$ Volt, $i_{\text{eff.}} = 15,5$ Amp., $e_{\text{eff.}} = 38,8$ Volt);

E_2 (Fig. 6) Spannungskurve eines induktiven Kreises mit einem Lichtbogen von 1 mm Länge zwischen Homogenkohlen einer Jablochkoffschen Kerze ($w = 0,1$ Ohm, $p = 0,0129$ Henry, $E_{\text{eff.}} = 72,5$ Volt, $i_{\text{eff.}} = 11,5$ Amp., $e_{\text{eff.}} = 42,6$ Volt). Die analytisierte ε -Kurve ist jene der Fig. 4.

Ist das in Frage stehende Gesetz erfüllt, so müssen die Koeffizienten $a_2 = a_4 = \dots$, $b_2 = b_4 = \dots = 0$ sein. Die Tabelle zeigt, daß dies teils ganz, teils sehr nahe der Fall ist.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	
I_1 (Fig. 4)	17,6	-0,2	2,0	0,2	-1,2	0,0	-1,0	-0,8	-1,0	Amp.
E (Fig. 12)	70,8	-0,8	20,2	-1,2	8,8	-0,1	2,0	-0,5	0,2	Volt
E_2 (Fig. 4)	54,2	0,0	23,2	0,6	11,0	0,4	4,8	0,8	-1,8	Volt
E_2 (Fig. 6)	58,8	-0,6	18,6	0,4	9,6	0,2	6,6	-1,0	2,4	Volt
ε (Fig. 4)	79,0	-0,4	1,2	1,0	1,0	0,2	0,2	-0,2	0,6	Volt

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	
I_1 (Fig. 4)	-10,0	-0,6	8,6	-0,2	0,4	0,2	-1,0	-0,6	-0,6	Amp.
E (Fig. 12)	5,2	0,0	3,4	1,2	-0,6	0,4	0,2	0,0	-0,4	Volt
E_2 (Fig. 4)	3,4	0,4	-4,0	1,2	-6,0	-0,2	4,0	0,0	1,4	Volt
E_2 (Fig. 6)	-1,4	1,4	-6,1	0,6	-2,8	0,6	1,8	0,4	0,4	Volt
ε (Fig. 4)	-2,4	0,8	0,8	0,2	1,8	0,0	-0,2	0,0	0,0	Volt

Daß das Gesetz bei Materialverschiedenheit der Elektroden nicht mehr zutrifft, zeigen die Oszillogramme von Metall-Kohle-Bogen.¹⁾

Stabilität des Gleichstromlichtbogens.

Wir wenden uns nun einer anderen Untersuchung zu, indem wir fragen, unter welchen Umständen ein gewöhnlicher Gleichstrombogen stabil brennt. In den Kreis sei außer dem Lichtbogen eine konstante EMK. E_0 , ein Widerstand w und eine Selbstinduktion p eingeschaltet. Eine kleine Störung des konstanten Stromes i_0 , welchem die Elektrodenspannung e ,

1) S. Blondel, Compt. rend. 128. p. 727.

und der Lichtbogenwiderstand $\omega_0 = e_0/i_0$ entspricht, ruft einen veränderlichen Strom i und eine zugehörige Elektrodenspannung e hervor, welche die bekannte elektrodynamische Beziehung erfüllen:

$$p \frac{di}{dt} + w i + e = E_0.$$

Außerdem gilt unsere dynamische Charakteristik (2), (3), welche wir wie oben in ein Gleichungssystem für $\omega = 1/\sigma$ umwandeln:

$$\frac{d\omega}{dt} = (a - c e^2) \omega - (d_0 T - b) \omega^2,$$

$$\frac{dT}{dt} = r e i + h - s T.$$

Wir setzen nun

$$i = i_0 + x, \quad \omega = \omega_0 + y, \quad T = T_0 + z;$$

x, y, z sind also die kleinen Abweichungen von den Gleichstromwerten i_0, ω_0, T_0 . Indem wir diese Werte in die Gleichungen substituieren und dabei, wie üblich, nur erste Potenzen der kleinen Größen x, y, z beibehalten, erhalten wir:

$$p \frac{dx}{dt} + w(i_0 + x) + \omega_0(i_0 + x) + i_0 y = E_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = (a - c e_0^2)(\omega_0 + y) - 2 c e_0 \omega_0^2 x - 2 c e_0^2 y - [d_0(T_0 + z) - b] \omega_0^2 - 2(d_0 T_0 - b) \omega_0 y,$$

$$\frac{dz}{dt} = r i_0^2 (\omega_0 + y) + 2 r i_0 \omega_0 x + h - s(T_0 + z).$$

Nun müssen aber die Gleichstromwerte den Bedingungen genügen:

$$(w + \omega_0) i_0 = E_0,$$

$$a - c e_0^2 - (d_0 T_0 - b) \omega_0 = 0, \quad r e_0 i_0 + h - s T_0 = 0.$$

Aus den zwei letzten Beziehungen folgt, wie wir schon gelegentlich der Besprechung der statischen Charakteristik sahen,

$$(d_0 r + c s) e_0^2 - a s = (b s - d_0 h) \omega_0 = m a s \omega_0.$$

Benutzen wir diese Beziehungen sowie die Abkürzungen

$$\frac{w}{p} = \delta, \quad \frac{\omega_0}{p} = \delta_0,$$

so nehmen die Differentialgleichungen die Form an:

$$\frac{dx}{dt} = -(\delta + \delta_0)x - \frac{i_0}{p}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2ce_0\omega_0^2x - (a + ce_0^2)y - d_0\omega_0^2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2re_0x + ri_0^2y - sz.$$

Zu diesem System von linearen Differentialgleichungen gehört, wie bekannt, die folgende charakteristische algebraische Gleichung in λ :

$$\begin{vmatrix} -(\delta + \delta_0 + \lambda), & -2ce_0\omega_0^2, & 2re_0 \\ -\frac{i_0}{p}, & -(a + ce_0^2 + \lambda), & ri_0^2 \\ 0, & -d_0\omega_0^2, & -(s + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

indem wir zur Abkürzung setzen

$$a_1 = a + s + \delta + \delta_0 + ce_0^2,$$

$$a_2 = (d_0r + cs)e_0^2 + ce_0^2(\delta - \delta_0) + as + (a + s)(\delta + \delta_0),$$

$$a_3 = (d_0r + cs)e_0^2(\delta - \delta_0) + as(\delta + \delta_0).$$

Bekanntlich hängt die Entscheidung der Frage nach der Stabilität ab von den Vorzeichen, welche die reellen Teile der Wurzeln dieser Gleichung erhalten.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die reellen Anteile der Wurzeln einer Gleichung n ten Grades mit reellen Koeffizienten

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

negativ seien, hat Hurwitz gefunden.¹⁾ Die Bedingungen lauten:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots \text{ bis zur } n-1\text{ten Determinante,}$$

ferner

$$a_n > 0.$$

Wenden wir diese Kriterien auf unseren Fall an. Stabil ist der Gleichstromzustand, wenn die reellen Teile der Wurzeln unserer Gleichung in λ negativ sind. Hierzu ist also nötig, daß

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

1) Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, Math. Ann. 46. p. 273 ff.

Von diesen drei Bedingungen ist die erste stets erfüllt. Von der zweiten Bedingung läßt sich zeigen, daß sie sicher erfüllt ist, sobald es die dritte ist, ja noch darüber hinaus. In der Tat, wenn die dritte Bedingung erfüllt ist, kann man setzen:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &\equiv (a + s + 2\delta_0 + ce_0^2)(d_0 r + cs)e_0^2 + (a + s + ce_0^2)as \\ &\quad + (a + s + \delta + \delta_0 + ce_0^2)[(a + s)(\delta + \delta_0) + ce_0^2(\delta - \delta_0)] \\ &> (a + s + 2\delta_0 + ce_0^2)(d_0 r + cs)e_0^2 + (a + s + ce_0^2)as \\ &\quad + (a + s + \delta + \delta_0 \\ &\quad + ce_0^2)(\delta + \delta_0) \left[a + s - ce_0^2 \frac{as}{(d_0 r + cs)e_0^2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Also kommt es überhaupt nur auf die dritte Bedingung an; diese läßt sich in der Form schreiben:

$$w - \frac{(d_0 r + cs)e_0^2 - as}{(d_0 r + cs)e_0^2 + as} \omega_0 > 0,$$

oder

$$w + \frac{\partial e_0}{\partial i_0} > 0.$$

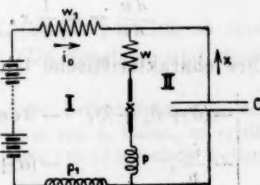
Sie ist also identisch mit der bekannten Kaufmannschen Stabilitätsbedingung.¹⁾ Doch die elegante und einfache Methode von Kaufmann ist nicht verallgemeinbar, und ihre Anwendung kann zu Irrtümern führen, wie dies sogleich gezeigt werden soll.

Lichtbogenschwingungen erster Art.

Nehmen wir die bekannte durch beistehende Figur illustrierte Schaltung: Dem Lichtbogen sei eine Kapazität C parallel geschaltet; der Widerstand w und die Selbstinduktion p gehören beiden Kreisen

I und II an; im Kreise I liege außerdem ein so großer Widerstand oder eine so große Selbstinduktion, daß etwaige im Kreise II auftretende Störungen die im Kreise I vorhandene Gleichstromstärke i_0 nicht merklich ändern.

Der Kondensatorkreis ist zunächst stromlos. Unter welchen Bedingungen ist der Gleichstrom im Kreise I stabil?



1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. 2. p. 158.

Ginge man nach der Kaufmannschen Methode vor, so würde die Stabilitätsbedingung genau so lauten wie ohne parallel geschaltete Kapazität. In der Tat hat Hr. Kaufmann selbst diesen Fall gerechnet,¹⁾ nur ohne die vereinfachende Annahme, daß der Strom i_0 etwa durch einen sehr großen Widerstand konstant gehalten werden soll. Führt man diese Bedingung in seine Formeln ein, so erhält man das erwähnte Resultat. Allein dieses entspricht nicht den Tatsachen, wie wir sogleich sehen werden. Der Grund für diese Abweichung liegt darin, daß man solchen Stabilitätsuntersuchungen nicht die statische, sondern die dynamische Charakteristik zugrunde legen muß.

Eine kleine Störung des Gleichstromzustandes bewirke, daß der Kapazitätsweg von einem kleinen Strome x , der Lichtbogenweg vom Strome $i_0 + x$ durchflossen wird. Die ursprüngliche Kondensatorspannung

$$V_0 = w i_0 + e_0$$

ändere sich hierdurch in $V_0 + u$. Nennt man wieder, wie oben, y die Änderung des Gleichstromwertes ω_0 , z jene von T_0 , so erhält man für die Störungen die vier Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = -(\delta + \delta_0)x - \frac{i_0}{p}y + \frac{1}{p}u,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2ce_0\omega_0^2x - (a + ce_0^2)y - d_0\omega_0^2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2re_0x + ri_0^2y - sz,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{C}x.$$

Ihre charakteristische Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} -(\delta + \delta_0 + \lambda), & -2ce_0\omega_0^2, & 2re_0, & -\frac{1}{C} \\ -\frac{i_0}{p}, & -(a + ce_0^2 + \lambda), & ri_0^2, & 0 \\ 0, & -d_0\omega_0^2, & -(s + \lambda), & 0 \\ \frac{1}{p}, & 0, & 0, & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

1) l. c. p. 176.

oder

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + \left(a_2 + \frac{1}{pC}\right) \lambda^2 + \left[a_3 + \frac{1}{pC}(a + s + ce_0^2)\right] \lambda + \frac{1}{pC}[as + (d_0 r + cs)e_0^2] = 0,$$

indem wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen benutzen. Die Stabilität wird wie oben durch die Hurwitzschen Kriterien garantiert:

$$a_1 > 0,$$

$$(14) \quad a_1 \left(a_2 + \frac{1}{pC}\right) - a_3 - \frac{1}{pC}(a + s + ce_0^2) > 0,$$

$$(15) \quad \begin{cases} \left[a_3 + \frac{1}{pC}(a + s + ce_0^2)\right] \left[a_1 \left(a_2 + \frac{1}{pC}\right) - a_3\right] \\ - \frac{1}{pC}(a + s + ce_0^2) - \frac{1}{pC} a_1^2 [as + (d_0 r + cs)e_0^2] > 0, \\ \frac{1}{pC}[as + (d_0 r + cs)e_0^2] > 0. \end{cases}$$

Von diesen Bedingungen sind die erste und vierte auf jeden Fall erfüllt. Die übrig bleibenden (14) und (15) sind also die wirklichen Stabilitätskriterien.

Nun erkennt man folgendes: Angenommen, der Widerstand w sei der ganze Widerstand des Kreises I, der übrige (w_1) sei also gegen ihn zu vernachlässigen (es ist klar, daß in diesem Falle die aus Bequemlichkeit angenommene Konstanz von i_0 durch große Selbstinduktion, nicht durch großen Widerstand erzwungen werden muß¹⁾); dann wäre ohne parallel geschaltete Kapazität die Stabilität bloß durch

$$a_3 > 0$$

garantiert. Schaltet man aber die Kapazität parallel, so sind die Stabilitätsbedingungen durch (14), (15) gegeben, und diese

1) Berücksichtigt man Widerstand w_1 und Selbstinduktion p_1 des Kreises I, läßt also die Annahme der Konstanz von i_0 fallen, so erhält man statt unserer Gleichung in λ , die wir etwa $f(\lambda) = 0$ nennen wollen, die folgende:

$$\left(\frac{w_1}{p_1} + \lambda\right) f(\lambda) + \frac{1}{p_1 C} \left[d_0 r e_0^2 \frac{\omega_0 - w}{p} - (s + \lambda)(a + ce_0^2 + \lambda) \left(\frac{\omega_0 + w}{p} + \lambda \right) - 2(s + \lambda) ce_0^2 \frac{\omega_0}{p} \right] = 0,$$

und man erkennt, daß sie sich für sehr großes p_1 auf unsere reduziert.

können auch dann noch bestehen, wenn die obige Bedingung nicht mehr erfüllt ist, wenn also der Vorgang ohne Parallelschaltung der Kapazität nicht mehr stabil wäre. In der Tat läßt sich ja Bedingung (14) schreiben

$$(14) \quad \frac{1}{pC}(\delta + \delta_0) + (a_1 a_2 - a_3) > 0,$$

(15) aber

$$(15) \quad \left\{ \left(\frac{1}{pC} \right)^2 (a + s + c e_0^2)(\delta + \delta_0) + \frac{1}{pC} [(a + s + c e_0^2)(a_1 a_2 - a_3) + a_3(\delta + \delta_0) - a_1^2 a s - a_1^2 (d_0 r + c s) e_0^2] + a_3(a_1 a_2 - a_3) \right\} > 0,$$

und man sieht, daß dies erfüllbar ist, auch wenn $a_3 \equiv 0$ wird, wenn man nur p oder C oder beide entsprechend wählt. *Ein an sich labiler Lichtbogenkreis kann also stabilisiert werden, wenn man ihm eine Kapazität parallel schaltet.*

Was geschieht nun, wenn die Bedingung (15) eben aufhört zu bestehen, wenn also an Stelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen tritt? Der Zustand wird nicht etwa labil; vielmehr werden die Schwingungen des Kondensatorkreises, welche bis dahin gedämpft gewesen waren und so die Stabilisierung bewirkt hatten, nunmehr ungedämpft. Dies erkennt man an unserer Gleichung in λ . Setzt man nämlich in diese

$$\lambda = i \nu \quad (i = \sqrt{-1})$$

mit reellem ν , so erhält man die zwei Gleichungen

$$(16) \quad \nu^2 = \frac{a_3}{a_1} + \frac{1}{pC} \frac{a + s + c e_0^2}{a_1},$$

$$\nu^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{pC} + a_2 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{pC} + a_2 \right)^2 - \frac{1}{pC} [a s + (d_0 r + c s) e_0^2]}.$$

Das Gleichsetzen beider ν -Werte liefert die Bedingung (15), wenn man in dieser das Ungleichheitszeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt. Die exakte Bedingung für das Einsetzen ungedämpfter Lichtbogenschwingungen ist demnach

$$(17) \quad \left\{ \left(\frac{1}{pC} \right)^2 + \left[\frac{a_1 a_2 - a_3}{\delta + \delta_0} + \frac{a_3}{a + s + c e_0^2} - a_1^2 \frac{a s + (d_0 r + c s) e_0^2}{(a + s + c e_0^2)(\delta + \delta_0)} \right] \frac{1}{pC} + (a_1 a_2 - a_3) a_3 \right\} = 0,$$

und im speziellen an der Stabilitätsgrenze des Lichtbogenkreises ohne parallel geschalteten Kondensator, also für $a_3 = 0$:

$$(17a) \quad \frac{1}{pC} = \frac{a_1}{\delta + \delta_0} \left[a_1 \frac{as + (d_0 r + cs) e_0^2}{a + s + c e_0^2} - a_2 \right].$$

Nunmehr gibt uns die Gleichung (16) den Ausdruck für die Frequenz der Lichtbogenschwingungen erster Art. Für $a_3 = 0$ erhält man speziell

$$(18a) \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{pC}} \sqrt{\frac{a + s + c e_0^2}{a + s + c e_0^2 + \delta + \delta_0}}.$$

Man erkennt die Tatsache, daß die Frequenz mit wachsender Gleichstromstärke und wachsender Selbstinduktion bei Konstanzhaltung aller übrigen Größen, besonders des Produktes pC , wächst. Eine genaue Diskussion der Gleichungen (16) und (17) und den Vergleich derselben mit experimentellen Resultaten behalte ich einer späteren Untersuchung vor.

Brünn, am 25. Juli 1913.

(Eingegangen 31. Juli 1913.)

$c s) e_0^2$,

ang (15),
Gleich-
Einsetzen

$a_3 = 0$,

**7. Über die Zeemaneffekte der Wasserstofflinie H_α in schwachen Magnetfeldern;
von Peter Erochin.**

Die nachstehend beschriebenen Beobachtungen wurden im Sommer 1912 im Physikalischen Institut der Universität Göttingen unter Leitung des Hrn. Geheimrat Prof. Voigt ausgeführt; die Bearbeitung der Resultate ist aber durch Erkrankung verzögert worden. Auch jetzt gebe ich nur einen Ausschnitt aus den Ergebnissen.

1. Hilfsmittel der Beobachtung.

Ich benutzte bei meinen Beobachtungen eine gewöhnliche Geissleröhre von 16 cm Gesamtlänge mit einer Kapillaren von 7 cm Länge und mit Aluminiumelektroden. Die Röhre wurde in das Innere des Elektromagneten, den Kraftlinien parallel eingeschaltet. Der Elektromagnet war von geschlossenem Typus mit einer doppelten Brücke, deren Zweige nebeneinander lagen, und die den magnetischen Widerstand zu einem Minimum abschwächte.

Um ein scharfes und lichtstarkes Spektrum zu bekommen, wandte ich nach einigen Versuchen die Methode von Rümelin¹⁾ an, die mir sehr gute Resultate gab.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch aus Kalilauge entwickelt und in einem Vorratsgefäß über P_2O_5 getrocknet, dann kam er durch eine Reihe Kapillarröhren und endlich in die Geissleröhre, von wo aus er stetig mit der Gaedekapselpumpe ausgepumpt wurde (Fig. 1).

Der Durchmesser der Kapillarröhren wurde so gewählt, daß der Druck in der Geissleröhre beständig 1,75 mm war.

1) G. Rümelin, Physik. Zeitschr. 11. p. 908. 1910.

Nach einigen Stunden des Auswaschens mit dem Gase wurde das Spektrum des Wasserstoffs sehr scharf und rein.

Zur Erregung der Geissleröhre benutzte ich ein kleines Induktorium von 1,5 cm Funkenlänge. Durch die Primärspule ließ ich einen Wechselstrom von einem Gleich-Wechselstrom-Umformer fließen, der mit einem Strom von 0,35 Amp. Stärke und 220 Volt Spannung betrieben wurde.

Die Geissleröhre leuchtete außerordentlich intensiv, ohne daß sich Kapillare und Elektroden stark erwärmten.

Für die Untersuchung der Linienstruktur benutzte ich eine Lummerplatte 4,92 mm dick und mit dem Brechungsindex in Hartmanns Darstellung¹⁾

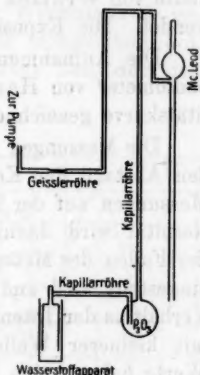


Fig. 1.

$$n = 1,50082 + \frac{77,7}{\lambda - 1696,1}$$

Die Berechnung des Abstandes zweier Linien oder Komponenten geschah nach der Formel²⁾

$$d\lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2D \left(n^2 - 1 - n\lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)} \frac{d\theta'}{d\theta},$$

wo λ die Wellenlänge, $d\lambda$ der gesuchte Abstand, D die Dicke der Platte, n ihr Brechungsindex, $d\theta$ die Winkeldifferenz zweier Ordnungen, $d\theta'$ die Winkeldifferenz der beiden Linien bzw. der Komponente und der Hauptlinie ist. Aber da mit wachsendem Einfallswinkel die Abstände zweier Ordnungen wachsen, so darf man für $d\theta'$ und $d\theta$ nicht direkt die auf der Teilmaschine gemessenen Entfernungen in die Formel einsetzen, sondern muß graphisch interpolieren, oder aber die Mittelwerte zweier entsprechenden Abstände nehmen.³⁾

1) J. Hartmann, *Astrophys. Journ.* 8. p. 218—222, 1898.

2) O. v. Baeyer, *Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.* 10. p. 738—740. 1908; *Physik. Zeitschr.* 9. p. 831—834. 1908.

3) O. v. Baeyer, *Verh. d. Deutsch. Physik. Ges.* 10. p. 357—365. 1908.

Das Auflösungsvermögen der Platte für H_α war 340000. Für photographische Aufnahmen von H_α wurde die Spektralplatte von Wratten und Wainwright „panchromatic A“ verwendet. Die Expositionszeit betrug der Regel nach 1 Min.

Die Aufnahmen wurden photometrisch mit dem Mikrophotometer von Hartmann¹⁾ untersucht und dann die Intensitätskurve gezeichnet.

Die Messungen mit Hilfe des Mikrophotometers gaben für den Abstand der Komponenten der H_α -Linie 0,130 Å.-E.; die Messungen auf der Teilmaschine gaben 0,144 Å.-E. Das letzte Resultat wird dadurch erklärt, daß bei derartigen Objekten der Faden des Meßmikroskopes auf den Schwerpunkt der Linie eingestellt wird und nicht auf das Intensitätsmaximum.²⁾ Das Verhältnis der Intensitäten der Komponenten mit größerer und mit kleinerer Wellenlänge fand ich 14:9. Alle derartigen Werte haben keine absolute Bedeutung, da sie etwas von der inneren Absorption der Lichtquelle beeinflußt sind.

Um die Linien recht scharf zu erhalten, erwies es sich nützlich, mit der Wasserstoffröhre noch eine zweite Geissleröhre, mit Luft von 0,5 mm Druck gefüllt, in Serie geschaltet zu betreiben. Die Linien wurden auf diese Weise viel schärfer als ohne die zweite Röhre, aber die nötige Expositionszeit wurde dreimal so lang. Fig. 2 stellt das Resultat der Ausmessung einer solchen Linie dar.

Die besten Resultate gab die Hintereinanderschaltung zweier Leidener Flaschen von 40 cm Höhe und einer geringen Selbstinduktion von etwa 0,0045 Henry. Die Linien waren hier fast vollständig getrennt, wie die Kurve Fig. 3 zeigt. Aber die Expositionszeit war jetzt zu lang, etwa 20 Min., was eine Fehlerquelle darstellte, so daß ich diese Methode aufgeben mußte und nur die vorhergehend beschriebene benutzte.

Zum Zweck der Messung von Zeemaneffekten wurden stets auf ein und derselben Platte zwei Spektren übereinander photographiert, das eine im Magnetfeld, das andere feldlos. In den

1) J. Hartmann, Zeitschr. f. Instrumentenk. 19. p. 97. 1899.

2) O. v. Baeyer u. E. Gehrcke, Verh. d. Deutsch. Physk. Ges. 10. p. 426. 1908.

Weg
die p-
D
messer
Diese
dafür



2 4

I
weiter
bezüg
sichli
Ordn
I
Linie
mit v
den h
Linie
breite
geben
bester
beden
zufäll
gram
schen

Weg der Strahlen war ein Nicol gestellt, so daß die s - und die p -Komponenten getrennt photographiert wurden.

Die Feldstärke wurde mit Hilfe einer Wismutspirale gemessen, was für meine Zwecke genügende Genauigkeit bot. Diese Arbeit führte für mich Hr. R. Richter aus, dem ich dafür hier herzlichen Dank ausspreche.

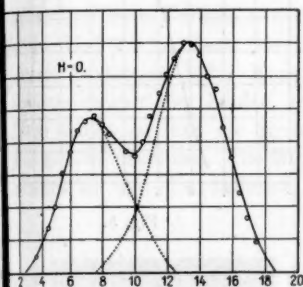


Fig. 2.

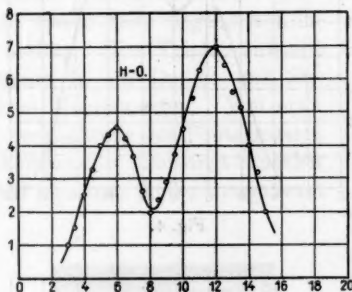


Fig. 3.

2. Zeemaneffekt der p -Komponenten.

Die Behandlung der p -Komponenten war deshalb bei weitem einfacher als die der s -Komponenten, weil nicht nur die bezügliche Erscheinung die einfachere ist, sondern und hauptsächlich, weil hier ein Übereinandergreifen der verschiedenen Ordnungen nicht eintrat.

Der Zeemaneffekt nimmt bei der besonders untersuchten Linie H_α den Verlauf, daß sich die Konstituenten des Duplets mit wachsender Feldstärke einander nähern und schon bei den höchsten mir erreichbaren Feldern merklich in eine einzige Linie zusammenfließen, die allerdings hier noch beträchtlich breiter ist als jede der einzelnen Konstituenten. Figg. 4 bis 7 geben einige der photometrisch gewonnenen Kurven, die am besten gelungen sind. Bei ihrer Vergleichung hat man zu bedenken, daß die Absolutwerte der Schwärzungen von dem zufälligen Zustand der Geissleröhre abhängen. Das Photogramm Nr. 1 gibt eine Anschauung von dem direkten Aussehen der Aufnahmen. Wie schon oft bemerkt, ist das Auge

sehr wenig fähig, den wirklichen Intensitätsverlauf innerhalb des Negativs einer Spektrallinie zu beurteilen.

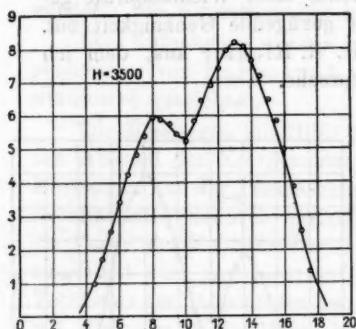


Fig. 4.

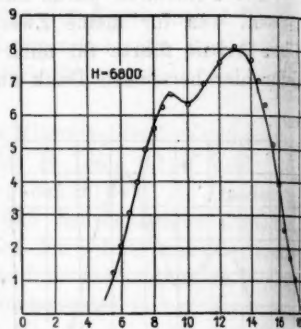


Fig. 5.

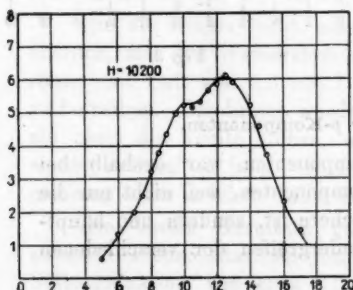


Fig. 6.

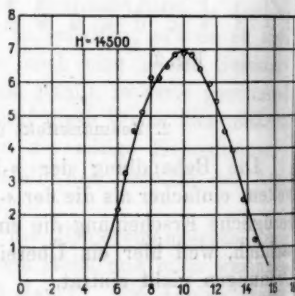


Fig. 7.

Soweit die Messungen einen Schluß gestatten, scheint die *Bewegung* der Konstituenten zueinander hier anfänglich mit dem Quadrat der Feldstärke proportional zu sein. Nachstehende Zahlen geben hierüber Aufschluß:

H	3500	5050	6800	8400
$\delta \lambda$	0,007	0,025	0,025	0,036 Å-E.
$\frac{\delta \lambda}{H^2} 10^{10}$	5,71	5,87	5,23	5,10

Die Abnahme von $\delta \lambda / H^2$ mit wachsendem H entspricht dem schließlichen Zusammenfließen der Konstituenten.

3. Zeemaneffekt der s -Komponenten.

Bei wachsender Feldstärke war anfangs nur eine Verbreiterung (Photogramm Nr. 2) der Konstituenten zu bemerken, die bald miteinander verschwammen. Von etwa 5000 Gauss ab lassen die Intensitätskurven auf die beginnende Umwandlung in ein Triplet schließen, dessen nach Rot gelegene Außenkomponente (entsprechend dem Verhalten der auf dieser Seite liegenden Konstituenten) die größere Stärke besitzt. Dies Triplet entsteht durch Zerlegung jeder Konstituente in ein Duplet und Zusammenrücken der beiden inneren Komponenten. Von etwa 5000 Gauss an läßt die direkte Beobachtung der Photogramme das gleiche erkennen. Die Mittelkomponente überwiegt zunächst an Stärke weit die äußeren, aber die rote Außenkomponente



Photogramm Nr. 1.



Photogramm Nr. 2.



Photogramm Nr. 3.



Photogramm Nr. 4.

überwiegt hier nur noch wenig die violette. Das Photogramm Nr. 3 gibt von diesem Zustand eine Anschauung.

Bei etwa 9000 Gauss beginnen die Außenkomponenten der benachbarten Ordnungen zusammenzuziehen. Sie geben zusammen hier etwas geringere Stärke, als sie die Mittelkomponente zeigt. Bei etwa 11000 Gauss (Photogramm Nr. 4) übertreffen die zusammengeflossenen Seitenkomponenten merk-

lich die stark abgeblaßte Mittelkomponente. Letztere ist nicht unbeträchtlich aus der Mitte der Konstituenten nach Violett hin verschoben — eine Bewegung, die sich schon auf dem vorigen Photogramm andeutet und die, trotz einiger Unsicherheit der Bestimmung absoluter Verschiebungen, daher wohl als reell zu betrachten ist. Aber die Beobachtungen der Herren Paschen und Back lassen es als möglich erscheinen, daß bei sehr starken Feldern die Mittellinie mit noch weiter abnehmender Stärke in die geometrische Mitte der feldlosen Konstituenten zurückkehrt.

Charkow, im Februar 1913.

(Eingegangen 3. April 1913.)



Koor
Syste
Ener
gleich

(1)

Die

(2)

liefer

im Z

im 2

wirkl

dann

einer

kurve

Schar

Punk

unend

1

bruar

der U

unabh

gelang

gegebe

Schwe

scheid

Roxer

geht,

**8. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme¹⁾;
von M. Plancherel.**

Bezeichnen $q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n$ die generalisierten Koordinaten und Momente eines konservativen mechanischen Systems von n Freiheitsgraden und $E = E(q, p)$ die totale Energie desselben, so lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$(1) \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_h}, \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Die Gleichung

$$(2) \quad E(q, p) = \text{const.}$$

liefert dann unmittelbar ein erstes Integral der Bewegung.

Geometrisch können wir die jeweilige Phase des Systems im Zeitmoment t durch einen Punkt mit den Koordinaten (q, p) im $2n$ -dimensionalen Raum (Phasenraum) darstellen. Der wirklichen Bewegung des Systems im Laufe der Zeit entspricht dann im Phasenraum die Bewegung des Punktes (q, p) längs einer Kurve $C(t)$, der Bahnkurve des Systems. Die Bahnkurve gehört zu einer gewissen Fläche S (Energiefläche) der Schar (2). Es gilt nun für $n > 1$ folgender Satz:

Die Bahnkurve $C(t)$ des Systems geht nicht durch jeden Punkt der Energiefläche S . Auf der Energiefläche existiert eine unendliche, nicht abzählbare Menge verschiedener Bahnkurven.

1) Diese Unmöglichkeit habe ich zum erstenmal in einem im Februar 1912 gehaltenen Vortrag des mathematisch-physikalischen Seminars der Universität Freiburg (Schweiz) bewiesen. Hr. Dr. A. Rosenthal ist unabhängig von mir zu einem Beweis (Ann. d. Phys. 42. p. 796. 1913) gelangt, der mit meinem damaligen Beweis nahe verwandt ist. Den hier gegebenen Beweis habe ich in der Berner Sitzung (März 1912) der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vorgetragen. Er unterscheidet sich von meinem ersten Beweis und demjenigen des Hrn. Rosenthal dadurch, daß er nicht von den Brouwerschen Sätzen ausgeht, sondern auf der Theorie des Maßes der Punktmengen beruht.

Damit wird die Unverträglichkeit der Ergodenhypothese mit den Hamiltonschen Gleichungen bewiesen; denn diese Hypothese fordert gerade, daß die Bahnkurve durch jeden Punkt der Energiefläche gehen soll. Wir beschränken uns darauf, hier die Hauptpunkte des Beweises zu skizzieren.

1. Es ist immer möglich, auf der Fläche S einen Punkt A derart zu bestimmen, daß für eine $2n$ -dimensionale Kugel Σ , die mit hinreichend kleinem Radius um A als Mittelpunkt beschrieben ist, folgende Bedingungen erfüllt sind:¹⁾

a) Im Innern und auf der Grenze von Σ sind alle partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial E / \partial q_h$, $\partial E / \partial p_h$ stetige Funktionen des Punktes (q, p) .

b) Im Innern und auf der Grenze von Σ ist mindestens eine dieser Ableitungen durchweg von Null verschieden. Sei also etwa $\partial E / \partial q_1 \neq 0$.

c) Bezeichnen wir mit G den Teil der Energiefläche S , der innerhalb und auf der Grenze von Σ liegt, so bildet G ein einfach zusammenhängendes $(2n - 1)$ -dimensionales Gebiet.

2. In jedem Punkt von G können wir deshalb den Inhalt $d\sigma$ eines Flächenelementes durch die Formel

$$d\sigma = \frac{1}{\left| \frac{\partial E}{\partial q_1} \right|} \sqrt{\sum \left[\left(\frac{\partial E}{\partial q_h} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p_h} \right)^2 \right]} dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

definieren. Dadurch wird es möglich, die Borel-Lebesguesche Theorie des Maßes²⁾ auf beliebige Punktmengen von G zu übertragen. Sei E irgend eine Punktmenge auf G , und f eine durch die Festsetzung

$$f = \begin{cases} 1, & \text{auf } E \\ 0, & \text{außerhalb } E \end{cases}$$

definierte Funktion; existiert ferner das über G erstreckte Lebesguesche Integral

$$\int_{(G)} f d\sigma,$$

so stellt dieses Integral das Maß (G) der auf G meßbaren

1) Zur Rechtfertigung dieser Behauptung vgl. Rosenthal, l. c.

2) Vgl. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, Paris 1904.

Punktmenge E dar. Wenn das Maß von E auf G gleich Null ist, so heißt E zur Abkürzung eine *Nullmenge*. G selbst hat als Maß seinen Flächeninhalt, ist also keine Nullmenge. Die Summe einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Ein Kurvenbogen

$$q_h = q_h(t), p_h = p_h(t) \quad \tau < t < \tau'$$

heißt *rektifizierbar*, wenn das Integral

$$\int_{\tau}^{\tau'} \sqrt{\sum \left[\left(\frac{dq_h}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dp_h}{dt} \right)^2 \right]} dt$$

existiert und einen endlichen Wert hat. Besteht ein rektifizierbarer Kurvenbogen nur aus Punkten von G , so bildet er ($n > 1$) eine Nullmenge auf G .

3. Betrachten wir jetzt irgend eine durch einen inneren Punkt von G verlaufende Bahnkurve $C(t)$. Wir bezeichnen mit $C_G(t)$ denjenigen Teil dieser Bahnkurve, der aus inneren Punkten von G besteht und mit T jene Wertmenge (t), welche $C_G(t)$ entspricht. Wegen der Stetigkeit von dq_h/dt , dp_h/dt auf G ersieht man leicht, daß T aus den inneren Punkten einer höchstens abzählbaren Menge sich nicht überdeckender Intervalle besteht. Folglich ist $C_G(t)$ aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge rektifizierbarer Kurvenbogen zusammengesetzt. Da jeder dieser Kurvenbogen eine Nullmenge auf G bildet, ist $C_G(t)$ selbst eine Nullmenge. Mit anderen Worten: Der im Gebiete G liegende Teil einer beliebigen Bahnkurve des Systems bildet eine Nullmenge auf G . Da G selbst keine Nullmenge ist, so folgt jetzt unmittelbar der zu beweisende Satz.

Freiburg (Schweiz), August 1913.

(Eingegangen 29. August 1913.)

Die Numerierung der Photogramme auf Tafel I ist leider eine verkehrte geworden.

9. Berichtigung zu der Arbeit: **„Interferenzerscheinungen an Röntgenstrahlen“** **von W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue.**

Die Numerierung der Photogramme auf Tafel I ist leider eine verkehrte geworden.

Statt Fig. 1 soll es heißen Fig. 4,

„	2	„	„	„	3,
„	8	„	„	„	2,
„	4	„	„	„	1.

17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
1001
1002
1003
1004
1005
1006
1007
1008
1009
1010
1011
1012
1013
1014
1015
1016
1017
1018
1019
1020
1021
1022
1023
1024
1025
1026
1027
1028
1029
1030
1031
1032
1033
1034
1035
1036
1037
1038
1039
1040
1041
1042
1043
1044
1045
1046
1047
1048
1049
1050
1051
1052
1053
1054
1055
1056
1057
1058
1059
1060
1061
1062
1063
1064
1065
1066
1067
1068
1069
1070
1071
1072
1073
1074
1075
1076
1077
1078
1079
1080
1081
1082
1083
1084
1085
1086
1087
1088
1089
1090
1091
1092
1093
1094
1095
1096
1097
1098
1099
1100
1101
1102
1103
1104
1105
1106
1107
1108
1109
1110
1111
1112
1113
1114
1115
1116
1117
1118
1119
1120
1121
1122
1123
1124
1125
1126
1127
1128
1129
1130
1131
1132
1133
1134
1135
1136
1137
1138
1139
1140
1141
1142
1143
1144
1145
1146
1147
1148
1149
1150
1151
1152
1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161
1162
1163
1164
1165
1166
1167
1168
1169
1170
1171
1172
1173
1174
1175
1176
1177
1178
1179
1180
1181
1182
1183
1184
1185
1186
1187
1188
1189
1190
1191
1192
1193
1194
1195
1196
1197
1198
1199
1200
1201
1202
1203
1204
1205
1206
1207
1208
1209
1210
1211
1212
1213
1214
1215
1216
1217
1218
1219
1220
1221
1222
1223
1224
1225
1226
1227
1228
1229
1230
1231
1232
1233
1234
1235
1236
1237
1238
1239
1240
1241
1242
1243
1244
1245
1246
1247
1248
1249
1250
1251
1252
1253
1254
1255
1256
1257
1258
1259
1260
1261
1262
1263
1264
1265
1266
1267
1268
1269
1270
1271
1272
1273
1274
1275
1276
1277
1278
1279
1280
1281
1282
1283
1284
1285
1286
1287
1288
1289
1290
1291
1292
1293
1294
1295
1296
1297
1298
1299
1300
1301
1302
1303
1304
1305
1306
1307
1308
1309
1310
1311
1312
1313
1314
1315
1316
1317
1318
1319
1320
1321
1322
1323
1324
1325
1326
1327
1328
1329
1330
1331
1332
1333
1334
1335
1336
1337
1338
1339
1340
1341
1342
1343
1344
1345
1346
1347
1348
1349
1350
1351
1352
1353
1354
1355
1356
1357
1358
1359
1360
1361
1362
1363
1364
1365
1366
1367
1368
1369
1370
1371
1372
1373
1374
1375
1376
1377
1378
1379
1380
1381
1382
1383
1384
1385
1386
1387
1388
1389
1390
1391
1392
1393
1394
1395
1396
1397
1398
1399
1400
1401
1402
1403
1404
1405
1406
1407
1408
1409
1410
1411
1412
1413
1414
1415
1416
1417
1418
1419
1420
1421
1422
1423
1424
1425
1426
1427
1428
1429
1430
1431
1432
1433
1434
1435
1436
1437
1438
1439
1440
1441
1442
1443
1444
1445
1446
1447
1448
1449
1450
1451
1452
1453
1454
1455
1456
1457
1458
1459
1460
1461
1462
1463
1464
1465
1466
1467
1468
1469
1470
1471
1472
1473
1474
1475
1476
1477
1478
1479
1480
1481
1482
1483
1484
1485
1486
1487
1488
1489
1490
1491
1492
1493
1494
1495
1496
1497
1498
1499
1500
1501
1502
1503
1504
1505
1506
1507
1508
1509
1510
1511
1512
1513
1514
1515
1516
1517
1518
1519
1520
1521
1522
1523
1524
1525
1526
1527
1528
1529
1530
1531
1532
1533
1534
1535
1536
1537
1538
1539
1540
1541
1542
1543
1544
1545
1546
1547
1548
1549
1550
1551
1552
1553
1554
1555
1556
1557
1558
1559
1560
1561
1562
1563
1564
1565
1566
1567
1568
1569
1570
1571
1572
1573
1574
1575
1576
1577
1578
1579
1580
1581
1582
1583
1584
1585
1586
1587
1588
1589
1590
1591
1592
1593
1594
1595
1596
1597
1598
1599
1600
1601
1602
1603
1604
1605
1606
1607
1608
1609
1610
1611
1612
1613
1614
1615
1616
1617
1618
1619
1620
1621
1622
1623
1624
1625
1626
1627
1628
1629
1630
1631
1632
1633
1634
1635
1636
1637
1638
1639
1640
1641
1642
1643
1644
1645
1646
1647
1648
1649
1650
1651
1652
1653
1654
1655
1656
1657
1658
1659
1660
1661
1662
1663
1664
1665
1666
1667
1668
1669
1670
1671
1672
1673
1674
1675
1676
1677
1678
1679
1680
1681
1682
1683
1684
1685
1686
1687
1688
1689
1690
1691
1692
1693
1694
1695
1696
1697
1698
1699
1700
1701
1702
1703
1704
1705
1706
1707
1708
1709
1710
1711
1712
1713
1714
1715
1716
1717
1718
1719
1720
1721
1722
1723
1724
1725
1726
1727
1728
1729
1730
1731
1732
1733
1734
1735
1736
1737
1738
1739
1740
1741
1742
1743
1744
1745
1746
1747
1748
1749
1750
1751
1752
1753
1754
1755
1756
1757
1758
1759
1760
1761
1762
1763
1764
1765
1766
1767
1768
1769
1770
1771
1772
1773
1774
1775
1776
1777
1778
1779
1780
1781
1782
1783
1784
1785
1786
1787
1788
1789
1790
1791
1792
1793
1794
1795
1796
1797
1798
1799
1800
1801
1802
1803
1804
1805
1806
1807
1808
1809
1810
1811
1812
1813
1814
1815
1816
1817
1818
1819
1820
1821
1822
1823
1824
1825
1826
1827
1828
1829
1830
1831
1832
1833
1834
1835
1836
1837
1838
1839
1840
1841
1842
1843
1844
1845
1846
1847
1848
1849
1850
1851
1852
1853
1854
1855
1856
1857
1858
1859
1860
1861
1862
1863
1864
1865
1866
1867
1868
1869
1870
1871
1872
1873
1874
1875
1876
1877
1878
1879
1880
1881
1882
1883
1884
1885
1886
1887
1888
1889
1890
1891
1892
1893
1894
1895
1896
1897
1898
1899
1900
1901
1902
1903
1904
1905
1906
1907
1908
1909
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958
1959
1960
1961
1962
1963
1964
1965
1966
1967
1968
1969
1970
1971
1972
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008
2009
2010
2011
2012
2013
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
2022
2023
2024
2025
2026
2027
2028
2029
2030
2031
2032
2033
2034
2035
2036
2037
2038
2039
2040
2041
2042
2043
2044
2045
2046
2047
2048
2049
2050
2051
2052
2053
2054
2055
2056
2057
2058
2059
2060
2061
2062
2063
2064
2065
2066
2067
2068
2069
2070
2071
2072
2073
2074
2075
2076
2077
2078
2079
2080
2081
2082
2083
2084
2085
2086
2087
2088
2089
2090
2091
2092
2093
2094
2095
2096
2097
2098
2099
2100
2101
2102
2103
2104
2105
2106
2107
2108
2109
2110
2111
2112
2113
2114
2115
2116
2117
2118
2119
2120
2121
2122
2123
2124
2125
2126
2127
2128
2129
2130
2131
2132
2133
2134
2135
2136
2137
2138
2139
2140
2141
2142
2143
2144
2145
2146
2147
2148
2149
2150
2151
2152
2153
2154
2155
2156
2157
2158
2159
2160
2161
2162
2163
2164
2165
2166
2167
2168
2169
2170
2171
2172
2173
2174
2175
2176
2177
2178
2179
2180
2181
2182
2183
2184
2185
2186
2187
2188
2189
2190
2191
2192
2193
2194
2195
2196
2197
2198
2199
2200
2201
2202
2203
2204
2205
2206
2207
2208
2209
2210
2211
2212
2213
2214
2215
2216
2217
2218
2219
2220
2221
2222
2223
2224
2225
2226
2227
2228
2229
2230
2231
2232
2233
2234
2235
2236
2237
2238
2239
2240
2241
2242
2243
2244
2245
2246
2247
2248
2249
2250
2251
2252
2253
2254